

Tema 4: La variables aleatoria de Poisson

Estadística- Biología

Considera eventos raros por unidad de tiempo/distancia/superficie/. . . Por ejemplo:

- N^o de estrellas en un fragmento de espacio.
- N^o de átomos que se desintegran en un cierto período de tiempo.
- N^o de mutaciones en el ADN al someterlo a cierta dosis de radiación.
- N^o muertes a causa de una enfermedad (fuera de fases epidémicas).
- N^o de erratas al escribir una página de texto.

Un **proceso de Poisson** es el que está modelado por una variable

- 1 $X =$ "tasa de éxitos" es decir, "número de veces que ocurre algo (éxitos) por unidad de tiempo/superficie/,...".
- 2 Los éxitos son independientes unos de otros.
- 3 No hay un máximo de éxitos por unidad (tiempo, espacio,...).

Sea $\lambda > 0$, la variable aleatoria discreta X es de Poisson si puede tomar cualquier valor $0, 1, 2, \dots$ con función de probabilidad

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

donde λ es la tasa de éxitos. Se usa la notación $X \sim \text{Pois}_\lambda$

Se puede demostrar (aunque no lo haremos) que, si $X \sim \text{Pois}_\lambda$, entonces

- $\mu_X = E[X] = \lambda$
- $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

[Ver el zoo de Poisson](#)

Ejemplo: cálculo de probabilidades con la distribución de Poisson. Suponer que en cierta publicación se esperan 3 erratas por página. Entonces

$$X = N^{\text{a}} \text{ de erratas por página} \sim \text{Pois}_3(X) = \frac{3^x}{x!} e^{-3}$$

📌 Probabilidad de 2 erratas en una página: $\text{Pois}_3(X = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3}$

```
dpois(x = 2, lambda = 3)
```

```
## [1] 0.2240418
```

📌 Probabilidad de entre 4 y 6 erratas en una página:

$$\text{Pois}_3(4 \leq X \leq 6) = \frac{3^4}{4!} e^{-3} + \frac{3^5}{5!} e^{-3} + \frac{3^6}{6!} e^{-3}$$

```
sum(dpois(x = c(4,5,6), lambda = 3))
```

```
## [1] 0.3192596
```

¿Binomial, o Poisson?

La binomial se aproxima por Poisson (con $\lambda = np$) si (depende del autor)

- $x \geq 200$ y $p \leq 0.05$
- $x \geq 100$ y $p \leq 0.1$

Se parecen en que:

- Son variables discretas
- Los sucesos son independientes

Se diferencian en que:

- En la binomial hay un total de experimentos, en Poisson no hay un máximo establecido.
- En la binomial se tiene la probabilidad de éxito/fracaso y se calcula el número de éxitos entre cierto número total de eventos. En la Poisson se tiene la tasa (no el número) de éxitos (células/cultivo, duración en minutos/llamada a 010, accidentes/minuto,...).