PRACTICA 5: VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS. Con soluciones.

Curso 2022/23. Grado en Biología. Universidad de Alcalá.

1. Para una variable binomial $X \sim B(7, 1/4)$, calcula las siguientes probabilidades. Se recomienda resolver todos los apartados del ejercicio (excepto el último) con las funciones

   - `dbinom()` (probabilidad puntual, $P(X = 3) = dbinom(3, size = 7, prob = 1/4)$)
   - `pbinom()` (probabilidad acumulada, $P(X \leq 3) = pbinom(3, size = 7, prob = 1/4)$).

   . Puedes leer la sección 1 del tutorial05 (visita www.postdata-statistics.com).

   (a) $P(X \leq 4)$.
   Con `dbinom()` se calcula

   $$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots = P(X = 4)$$

   ```
   sum(dbinom(0:4, size = 7, prob = 1/4))
   
   [1] 0.9871216
   ```

   Con `pbinom()` el cálculo es, directamente

   ```
   pbinom(4, size = 7, prob = 1/4)
   
   [1] 0.9871216
   ```

   (b) $P(X < 3)$.
   (c) $P(X \geq 2)$.
   (d) $P(X > 3)$.
   (e) $P(2 \leq X \leq 4)$ (o, lo que es lo mismo, $P((X \geq 2) \cap (X \leq 4))$).
   (f) $P(2 < X < 4)$.
   (g) $P(2 \leq X < 4)$.
   (h) $P(2 < X \leq 4)$.

   Soluciones en la página 4.

2. Dada la variable de Poisson $X \sim Pois_3$, calcula las siguientes probabilidades con las funciones

   - `dpois()` (probabilidad puntual, $P(X = 2) = dpois(2, lambda = 3)$)
   - `ppois()` (probabilidad acumulada, $P(X \leq 2) = ppois(2, , lambda = 3)$).

   Observa que la sintaxis es equivalente a la del cálculo de probabilidades con la bionmial. Sin embargo, ten en cuenta que ahora los valores de X no están acotados superiormente.

   (a) $P(X \leq 4)$.
   Con `dpois()` se calcula

   $$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots = P(X = 4)$$

```r
sum(dpois(0:4, lambda = 3))
```

```
[1] 0.8152632
```

   Con `ppois()` el cálculo es, directamente

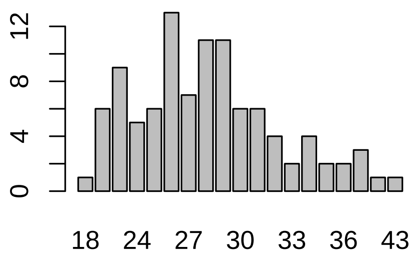
```r
ppois(4, lambda = 3)
```

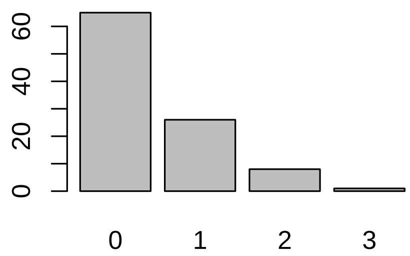
```
[1] 0.8152632
```

   (b) $P(X < 3)$.
   (c) $P(X \geq 2)$.
   (d) $P(X > 3)$.

   Soluciones en la página 5.

3. Estás trabajando con dos variables aleatorias discretas. Tomas una muestra de cada una de ellas y haces un diagrama de barras para observar la distribución de cada una de las muestras. ¿A qué tipo de variable aleatoria discreta que conozcas podría corresponder cada uno de ellos?





Soluciones en la página 5.

4. El número de huevos viables que pone una hembra de gorrión molinero (passer montanus) a lo largo de su vida sigue una distribución binomial de parámetros n = 15 y p = 0.16.

   (a) Calcula la probabilidad de que un individuo concreto ponga exactamente 3 huevos.

   (b) Calcula la probabilidad de que ponga 4 huevos o menos.

   (c) ¿A partir de qué valor está el 25% de los gorriones que menos huevos llegan a poner?

   (d) ¿Cuál es la descendencia esperada para cada hembra? ¿Crees que esta población se extinguirá?

   Soluciones en la página 5.

5. En cierto cultivo el número medio de células de *Rickettsia typhi* (las células que causan el tifus) es de 5 por cada 20 μm^2

   (a) ¿Cuántas células de ese tipo se espera encontrar en un cultivo de $16\mu m^2$?

   (b) Calcula la probabilidad de no encuentrar ninguna de esas células en un cultivo de $16\mu m^2$

   (c) Calcula la probabilidad de encuentrar al menos 9 de esas células en un cultivo de $16\mu m^2$

   Soluciones en la página 6.

6. En cierta colonia de aves hay mezcladas dos especies de chorlito, el chorlito dorado chico (*Pluvialis dominicana*) y el chorlito dorado asiático (*Pluvialis fulpa*). Es difícil distinguir a simple vista (para los no iniciados) la hembra de ambas especies. Suponer que el número de descendientes producido por cada hembra de chorlito dorado chico sigue una distribución binomial con $n = 20$ y probabilidad de éxito 0.2, mientas que esa misma cantidad sigue, para el dorado asiático, una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ crías por puesta.

   Suponiendo que en la colonia hay un 45% de chorlito dorado chico y un 55% de asiático, calcular la probabilidad de que una hembra elegida al azar produzca:

   (a) Entre 5 y 10 (ambos incluidos) descendientes viables, suponiendo que sea una chorlito dorada chico.

   (b) Más (estrictamente) de 4 descendientes viables.

   (c) Si ha producido (estrictamente) más de 4 descendientes viables, ¿cuál es la probabilidad de que fuera una chorlito asiático?

   Soluciones en la página 6.

SOLUCIONES

1. Ejercicio 1, pág. 1

   Empezamos con los cálculos.

   (a) Es directo:

   ```
   sum(dbinom(0:4, size = 7, prob = 1/4))
   
   ## [1] 0.9871216
   ```

   (b) $P(X < 3) = P(X \leq 2)$, luego:

   ```
   sum(dbinom(0:2, size = 7, prob = 1/4))
   
   ## [1] 0.7564087
   ```

   (c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$. Cuidado en el segundo paso!

   ```
   1- sum(dbinom(0:1, size = 7, prob = 1/4))
   
   ## [1] 0.5550537
   ```

   (d) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$

   ```
   1- sum(dbinom(0:3, size = 7, prob = 1/4))
   
   ## [1] 0.07055664
   ```

   (e) $P(2 \leq X \leq 4)$

   ```
   sum(dbinom(2:4, size = 7, prob = 1/4))
   
   ## [1] 0.5421753
   ```

   (f) $P(2 < X < 4) = P(X \leq 3) - P(x \leq 2) = P(X = 3)$

   ```
   dbinom(3, size = 7, prob = 1/4)
   
   ## [1] 0.1730347
   ```

   El resultado es el mismo, claro.

   (g) $P(2 \leq X < 4)$

   ```
   sum(dbinom(2:3, size = 7, prob = 1/4))
   
   ## [1] 0.4844971
   ```

   (h) $P(2 < X \leq 4))$

   ```
   sum(dbinom(3:4, size = 7, prob = 1/4))
   
   ## [1] 0.2307129
   ```

(i) $P(X<2|X\leq 5)=\frac{P((X<2)\cap(X\leq 5))}{p(x\leq 5)}=\frac{P(X<2)}{p(x\leq 5)}$

```
sum(dbinom(0:1, size = 7, prob = 1/4))/sum(dbinom(0:5, size = 7, prob = 1/4))
```

```
[1] 0.4455446
```

2. Ejercicio 2, pág. 2 .

(a)
```
sum(dpois(0:4, lambda = 3))
```

```
[1] 0.8152632
```

```
ppois(4, lambda = 3)
```

```
[1] 0.8152632
```

(b) $P(X<3)$.

```
sum(dpois(0:2, lambda = 3))
```

```
[1] 0.4231901
```

```
ppois(2, lambda = 3)
```

```
[1] 0.4231901
```

(c) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X\leq 1)$.

```
1 - sum(dpois(0:1, lambda = 3))
```

```
[1] 0.8008517
```

```
1- ppois(1, lambda = 3)
```

```
[1] 0.8008517
```

(d) $P(X>3)=P(X\geq 4)=1-P(X\leq 3)$.

```
1 - sum(dpois(0:3, lambda = 3))
```

```
[1] 0.3527681
```

```
1 - ppois(3, lambda = 3)
```

```
[1] 0.3527681
```

3. Ejercicio 3, pág. 2 . La de la izquierda podría ser una binomial y la de la derecha una Poisson.

4. Ejercicio 4, pág. 3 .

(a)
```
dbinom(3, size = 15, prob = 0.16 )

[1] 0.2299973
```

(b)
```
pbinom(4, size = 15, prob = 0.16 )

[1] 0.9222087
```

(c)
```
qbinom(0.25, size = 15, prob = 0.16 )

[1] 1
```

Los puedes comprobar con

```
pbinom(1, size = 15, prob = 0.16 )

[1] 0.2821337
```

(d) Se trata de calcular el valor esperado (la media) de esta variable aleatoria binomial

```
15 * 0.16

[1] 2.4
```

Como cada hembra da lugar a 2.4 individuos si, aproximadamente, la mitad de los individuos son machos y la otra hembras, por cada individuo se producen 1.2 individuos, lo que garantiza el crecimiento dela población.

5. Ejercicio 5, pág. 3

   (a) Si el número medio de células en 20 micrómetros cuadrados es 5, entonces (regla de tres) en 16 micrómetros cuadrados habrá 4.

   (b) La variable aleatoria X="número de células en un cultivo de 16 micrómetros cuadrados" sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 4$. Por tanto la probabilidad pedida es

```
dpois(0, 4)

[1] 0.01831564
```

   (c) En este caso, $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$

```
1-sum(dpois(0:8, 4))

[1] 0.02136343
```

6. Ejercicio 6, pág. 3 . En cierta colonia de aves hay mezcladas dos especies de chorlito, el chorlito dorado chico (*Pluvialis dominicana*) y el chorlito dorado asiático (*Pluvialis fulpa*). Es difícil distinguir a simple vista (para los no iniciados) la hembra de ambas especies. Suponer que el número de descendientes producido por cada hembra de chorlito dorado chico sigue una distribución binomial con $n = 20$ y probabilidad de éxito 0.2, mientas que esa misma cantidad sigue, para el dorado asiático, una Poisson de parámetro $\lambda = 2$.

Suponiendo que en la colonia hay un 45% de chorlitos dorados chicos y un 55% de asiáticos, calcular la probabilidad de que una hembra elegida al azar produzca

(a) Entre 5 y 10 (ambos incluidos) descendientes viables, suponiendo que sea una chorlito dorada chica.

```
sum(dbinom(5:10, 20, 0.2))

[1] 0.3697883
```

(b) Más (estrictamente) de 4 descendientes viables.
Es el Teorema de la probabilidad total:

$$P(X > 4) = P((X > 4 \cap dorada - chica) \cup (X > 4 \cap asiatica) =$$

$$P(X > 4 \cap dorada - chica) + P(X > 4 \cap asiatica) =$$

$$P(dorada - chica)P(X > 4|dorada - chica) + P(\cap asiatica)P(X > 4|asiatica)$$

es decir

```
0.45 * (1-pbinom(4, 20, 0.2)) + 0.55 * (1 - ppois(4, lambda = 2))

[1] 0.1956174
```

(c) Si ha producido (estrictamente) más de 4 descendientes viables, ¿cuál es la probabilidad de que fuera una chorlito asiática?
Es una aplicación del Teorema de Bayes:

$$P(asiatica|X > 4) = \frac{P(asiatica \cap X > 4)}{P(X > 4)}$$

es decir

```
(numerador = 0.55 * (1 - ppois(4, lambda = 2)) )

[1] 0.02895916

(denominador = 0.45 * (1-pbinom(4, 20, 0.2)) + 0.55 * (1 - ppois(4, lambda = 2)))

[1] 0.1956174

numerador/denominador

[1] 0.1480398
```

Soluciones en la página 6.