# PRACTICA 5: combinatoria, con soluciones.

## Estadística, Grado en biología sanitaria, UAH, 2023/24.

1. De entre los números naturales $1, 2, \ldots, 20$ se seleccionan cinco al azar con reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:

   (a) Los cinco sean pares.

   (b) Exactamente dos de ellos sean múltiplos de 3.

   (c) Dos sean impares y tres pares.

   Solución en la página **??**.

2. En la lotería primitiva gana quien acierta 6 números de entre 64 sin importar el orden en el que salgan. ¿Cuál es la probabilidad de ganar con una única apuesta? Solución en la página **??**.

3. Calcular la probabilidad de que un número de cuatro cifras (una matrícula, o un pin)

   (a) tenga cuatro cifras diferentes.

   (b) tenga alguna cifra repetida.

   (c) tenga exactamente dos cifras iguales.

   (d) tenga dos parejas de cifras iguales (pero distintas entre sí).

   (e) tenga exactamente tres cifras iguales.

   (f) tenga todas las cifras iguales.

   Solución en la página **??**.

## Soluciones de algunos ejercicios

1. (a) Hay al menos dos enfoques posibles:

   i. Una pasa por expresar el evento como una intersección y usar la regla de ma multiplicación:

   $$P(1_{par} \cap 2_{par} \cap 3_{par} \cap 4_{par} \cap 5_{par}) = P(1_{par}) \cdot P(2_{par} | \cap 1_{par}) \cdot \ldots \cdot P(5_{par} | 1_{par} \cap \cdots \cap 4_{par}) =$$

   Como hay reemplazamiento, los casos favorables y los posibles son los mismos en cada extracción (y, en realidad, no están condicionadas)

   $$\frac{10}{20}\frac{10}{20}\frac{10}{20}\frac{10}{20}\frac{10}{20} = 0.03125$$

   ii. Si ya conoces variables aleatorias discretas, está claro que cada extracción es un experimento de Bernoulli (dicotómico, conoces probabilidad de éxito y fracaso). Como hay reemplazamiento, las extracciones son independientes (las condiciones en que se realiza cada extracción son id énticas entre sí), y se hace un total de 5 extracciones. Por tanto, la variable $X =$ "cantidad de números pares obtenidos en 5 extracciones con reemplazamiento" es una $B(n = 5, p = 1/2)$, y lo que se pide es

   $$P(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.03125$$

(b) En análogo al anterior; trabaja con los múltiplos de 3 en lugar de con los múltiplos de 2. Entre los 20 primeros números naturales existen seis múltiplos de 3. La probabilidad de que al extraer un número, éste sea múltiplo de 3 es 6/20, mientras que la probabilidad de que no lo sea es de 14/20:

$$P = \left( \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) \left(\frac{6}{20}\right)^2 \left(\frac{14}{20}\right)^3 = 0.3$$

(c) De la misma forma que en el apartado anterior, la probabilidad de obtener un número impar en una extracción es 1/2. Si exáctamente dos de ellos son impares, los otros 3 deben ser forzosamente pares. Por tanto, la probabilidad de obtener 2 números impares y 3 pares será:

$$P = \left( \begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.31$$

2. En el bombo de la lotería hay 64 números de los que se extraen 6 (es decir, tenemos que trabajar sin reemplazo, dado que las bolas extraidas ya no se vuelven a introducir en el bombo). Podemos llamar $A_i$ al evento "en la extracción i-ésima sale uno de mis números". Y queremos calcular $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_6)$. Si usamos la regla de la multiplicación, tenemos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_6) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_6|A_1 \cap \cdots A_5)$$

En la primera extración hay 6 casos favorables frente a 64 posibles. En la segunda sólo hay 5 posibles (porque supongo que ya ha salido uno de mis números) frete a63 posibles, y así sucesivamente. Por tanto, la probabilidad de que nuestros seis números sean iguales a los extraídos del bombo:

$$\frac{6}{64}\frac{5}{63}\frac{4}{62}\frac{3}{61}\frac{2}{60}\frac{1}{59} = 1.33 \times 10^{-8}$$

También puedes razonarlo de esta forma: hay 1 caso favorable, y el número de casos posibles es el número de subconjuntos de 6 elementos que se puede formar con las 64 bolas, es decir, el número de combinaciones de 64 elementos tomados de 6 en 6. Por tanto, la probabilidad es

```
1/choose(64,6)

## [1] 1.333789e-08
```

3. (a) Se proponen dos enfoques posibles:

   i. Es posible usar la regla de Laplace.

   - Casos favorables: como las cuatro cifras deben ser diferentes, podemos visualizarlas como la cantidad de formas diferentes en que se pueden ordenar 4 de los 10 números (del 0 al 9), entendiendo que el orden es importante (1234 es diferente de 4321). Es decir, se trata de variaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4.
   - Casos posibles: las cuatro cifras se pueden repetir, de modo que se trata de variaciones con repetición de 10 elementos taomdos de 4 en 4.

Es decir,

$$\frac{V(10,4)}{VR(10,4)}$$

```
(10*9*8*7)/10^4
## [1] 0.504
```

Si no te queda claro, ve a las diapositivas de combinatoria.

ii. Otra posibilidad es considerar la intersección de eventos y usar la regla de la multiplicación igual que en la práctica 4; se obtiene el mismo resultado, claro

```
(10/10)*(9/10)*(8/10)*(7/10)
## [1] 0.504
```

(b) Es el evento complementario del anterior, es decir

```
1-(10*9*8*7)/10000

## [1] 0.496
```

(c) Por un lado, hay 10000 casos posibles. Vamos a contar los favorables. Cada número debe tener dos cifras repetidas, que pueden ocupar en lugar de las unidades, decenas, centenes o millares. Por ejemplo, si fijamos el 1, algunos números son `11xy`, `1x1y`, `1xy1`, `x11y`...(donde x, y, son las otras dos cifras, distintas de 1 y distintas entre sí). Lo primero es contar el número de formas en que pueden colocarse los 2 unos en las cuatro posiciones. Esa cantidad es $\left(\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right)$, ya que elegimos las posiciones de 2 en 2 de entre las cuatro posibles (unidades, decenas,...), y da igual el orden en el que las elijamos, porque en ambas posiciones colocaremos el mismo número, en este caso, el uno (si no lo ves claro, puedes volver sobre el ejercicio 1 (pág 1). En cada caso, habremos usado un número del 0 al 9, de manera que disponemos de 9 números con los que rellenar las dos cifras restantes (sin repetirlos), lo que puede hacerse de $9 \cdot 8$ formas distintas (variaciones de 9 elementos de orden 2) porque el orden importa: 2298 es diferente de 2289. De momento, una vez fijado la cifra que se repite, podemos

$$\left(\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right) * 9 * 8$$

números posibles. Como hay 10 posibles valores para la cifra repetida, en total hay

$$10\left(\begin{array}{c}4\\2\end{array}\right) * 9 * 8$$

casos favorables. Resumiendo, la probabilidad pedida es

```
(10*choose(4,2)*9*8)/10000

## [1] 0.432
```

(d) De nuevo, hay 10000 casos posibles. Razonando como en el apartado anterior, hay $\binom{4}{2}$ formas en las que cada una de las 10 cifras puede aparecer repetida 2 veces en un número de 4 dígitos. Y los dos dígitos restantes sólo los podemos completar de 9 formas diferentes (porque hay 9 cifras del 0 al 9 que son distintas de la que ya aparece).

Sin embargo, hay que tener que cuenta que el planteamiento anterior hace que cada par de parejas aparezca 2 veces: imagina que para cada configuración de huecos fijas, de uno en uno, cada una de las cifras del 0 al 9 y completas con restantes 9 cifras disferentes, cada una de ellas aparece 2 veces: "en el grupo de las que fijas" y en el grupo de "con las que completas". Por eso hay que dividir entre 2

```
(10*choose(4,2)*9)/10000 * (1/2)

## [1] 0.027
```

las operaciones están organizadas como en el apartado anterior para facilitar encontrar el paralelismo.

(e) Hay $\binom{4}{3}$ posibilidades de obtener tres cifras iguales (puesto que el orden no nos preocupa). La probabilidad de obtener un número de los diez posibles es (1/10). Por tanto, la probabilidad de obtener tres cifras iguales es:

```
choose(4,3)*(1/10)^3*(9/10)

## [1] 0.0036
```

(f) Hay 10 casos favorables (0000, 1111,..., 9999) y 10000 posibles, por lo que la probabilidad es

$$10/10000 = 0.001$$