Agregación aproximada de variables. Aplicaciones a la ecología.

Marcos Marvá Ruiz.

Departamento de matemáticas. UAH

10 diciembre de 2008.

Sumario

1. Introducción
   - Para empezar...
   - ...un ejemplo sencillo
2. Resultados generales
   - Hipótesis
   - Resultados generales
3. Aplicaciones
   - Multiatractores
   - Modelos clásicos
   - Efecto Allee
   - Hospedadores y parasitoides

Ejemplo: sistema dinámico discreto

- Variables de estado: dinero a plazo fijo durante n años: A_n.
- Variables independiente: número de años $n = 0, 1, 2, \cdots$.
- Conocemos la regla R que explica

$$A_{n+1} = A_n + rA_n = (1 + r)A_n$$

- Estudio cualitativo:

$$¿ \lim_{n \to \infty} A_n ?$$

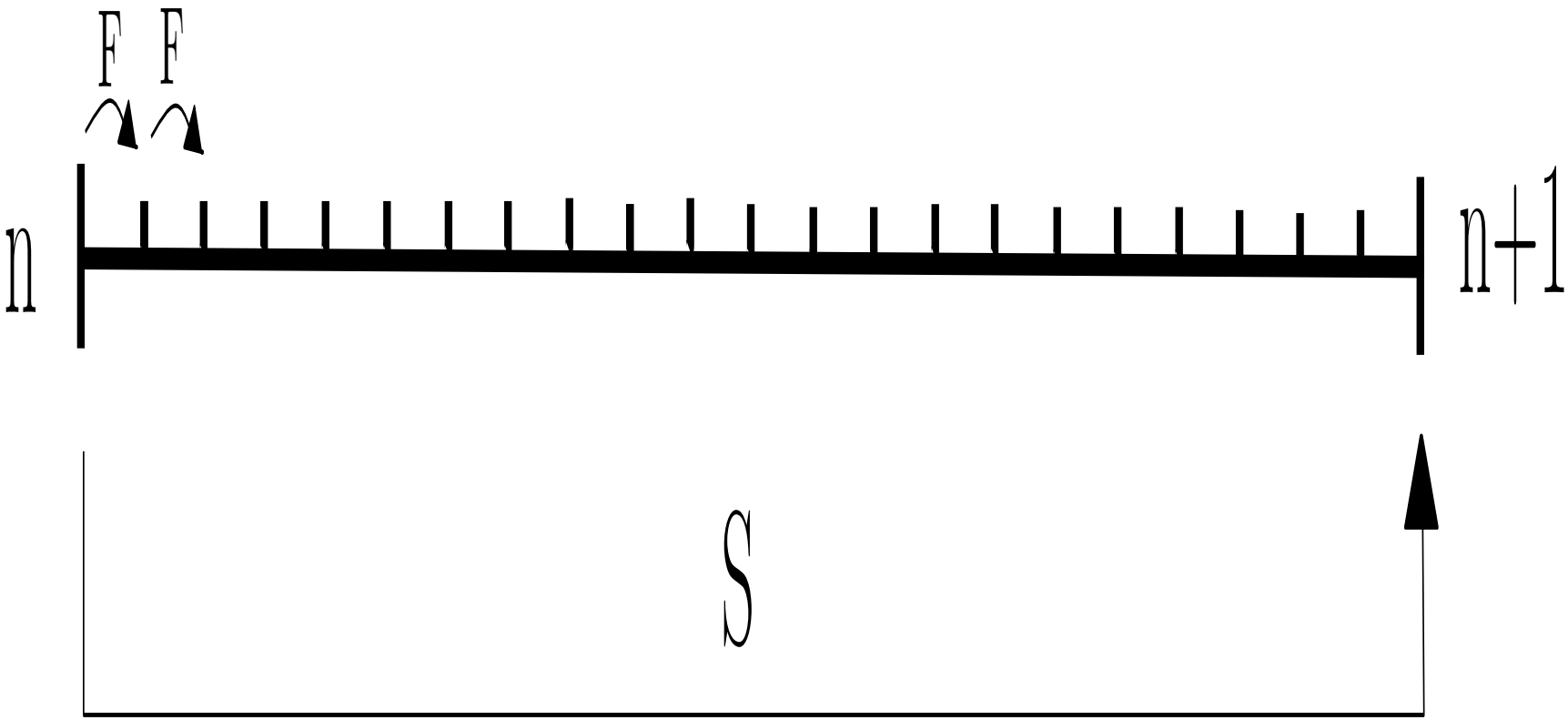
Sumidero.

Fuente.

Otros equilibrios.

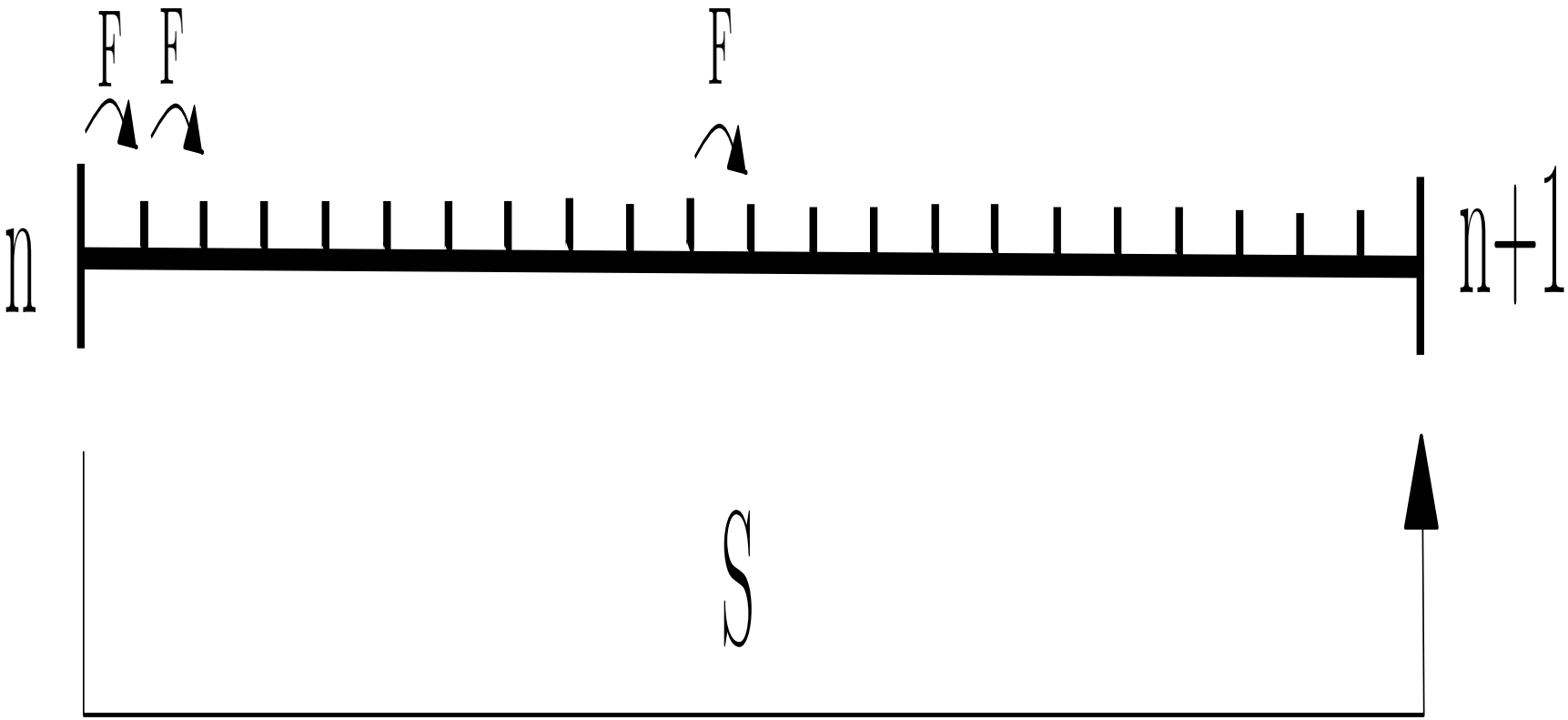
Construcción del modelo

Escalas de tiempo



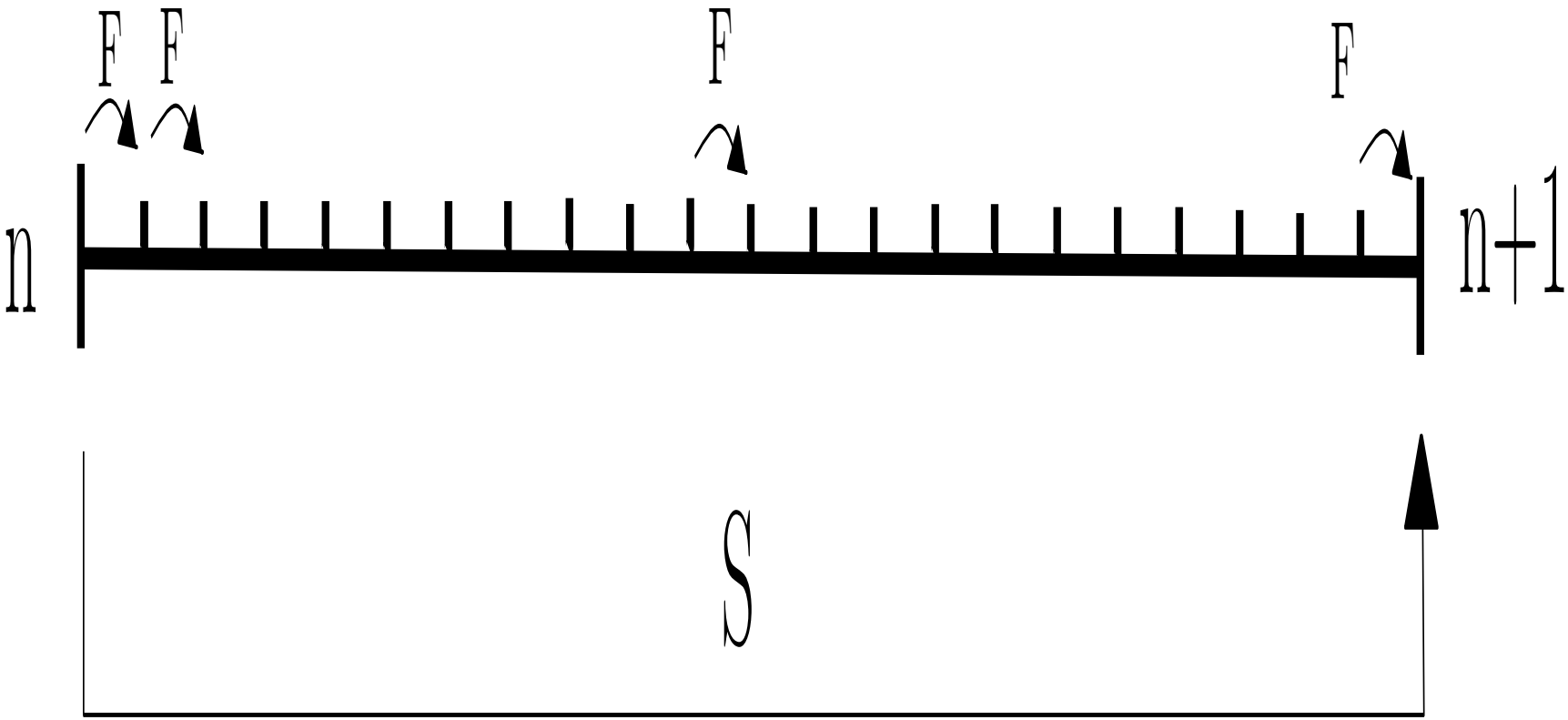
Construcción del modelo

Escalas de tiempo



Construcción del modelo

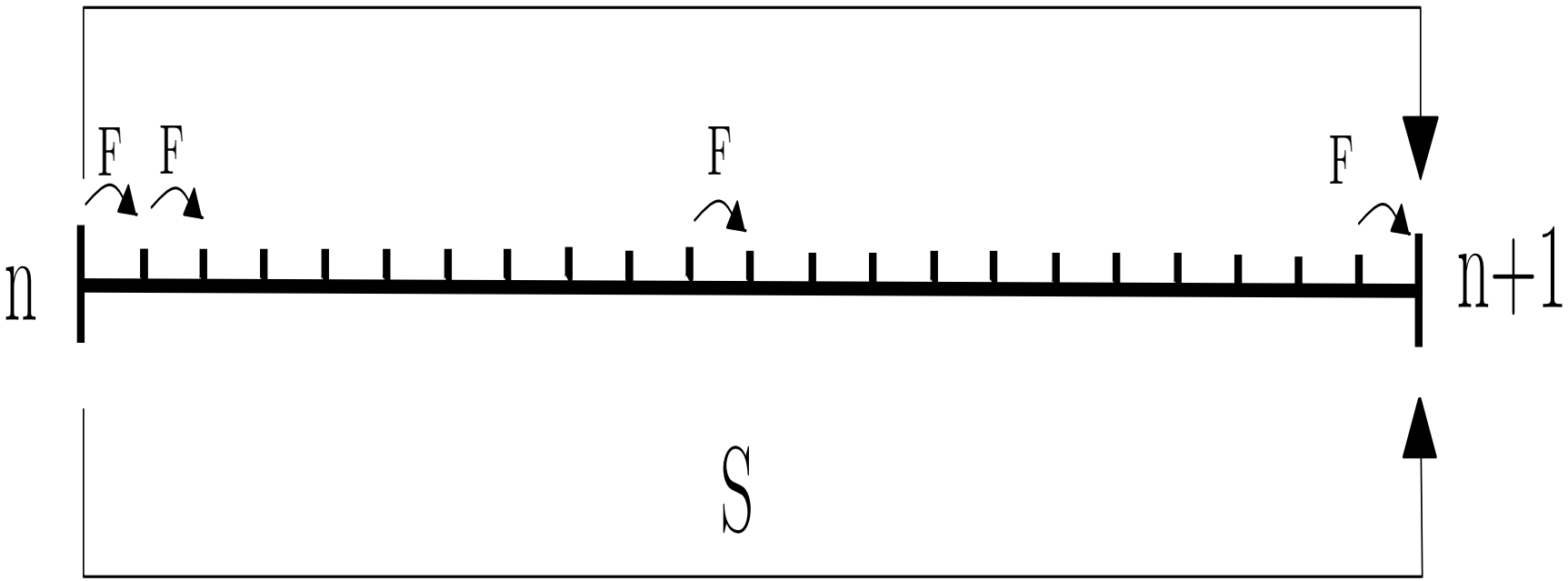
Escalas de tiempo



Construcción del modelo

Distinción de escalas de tiempo

$$F^k = F \cdot F \cdot \ldots \cdot F$$



Construcción del modelo
Ensamblaje

El modelo es

$$X_k(n+1) = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{21} & 0 \\ 0 & f_{12} & 0 & f_{22} \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-h_{12} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{21} & 1-h_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_{12} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & 1-p_{21} \end{pmatrix}^k X_k(n) \quad (1)$$

El índice k indica la ratio entre escalas de tiempo.

Es decir

$$X_{k,n+1} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{F}^k \cdot X_{k,n}$$

Construcción del modelo
Ensamblaje

El modelo es

$$X_k(n+1) = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{21} & 0 \\ 0 & f_{12} & 0 & f_{22} \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-h_{12} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{21} & 1-h_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_{12} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & 1-p_{21} \end{pmatrix}^k X_k(n) \quad (1)$$

- El índice k indica la ratio entre escalas de tiempo.
- Es decir

$$X_{k,n+1} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{F}^k \cdot X_{k,n}$$

Modelo con dos escalas de tiempo

Equilibrio rápido

La matriz $\mathcal{F}$ de migraciones

- regular y estocástica por bloques = proceso de Markov.
- Se aplica la teoría de Perrón-Frobenius:
  Sean $\mathbf{v_i}$ y $\mathbf{u_i} = (1,1)^T$ son los autovectores por la derecha y por la izquierda de $\mathcal{F}_i$ asociados con el autovalor principal 1.

Modelo con dos escalas de tiempo

Equilibrio rápido

Existe un equilibrio para la dinámica rápida, es decir

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}^k = \bar{\mathcal{F}}$$

Para valores grandes de k el `sistema general`

$$X_{k,n+1} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{F}^k \cdot X_{k,n}$$

se aproxima por el `sistema auxiliar`

$$X_{n+1} = \mathcal{S} \cdot \bar{\mathcal{F}} \cdot X_n.$$

Modelo con dos escalas de tiempo

Equilibrio rápido

Existe un equilibrio para la dinámica rápida, es decir

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}^k = \bar{\mathcal{F}}$$

Para valores grandes de k el `sistema general`

$$X_{k,n+1} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{F}^k \cdot X_{k,n}$$

se aproxima por el `sistema auxiliar`

$$X_{n+1} = \mathcal{S} \cdot \bar{\mathcal{F}} \cdot X_n.$$

Modelo con dos escalas de tiempo

Agregación

El equilibrio rápido se descompone como

$$\bar{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1 u_1^T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v_2 u_2^T} \end{pmatrix} = V \cdot U$$

Definimos las `variables globales` como

$$Y(n) = U \cdot X(n) = \begin{pmatrix} x_{11}(n) + x_{12}(n) \\ x_{21}(n) + x_{22}(n) \end{pmatrix}$$

representan la densidad de individuos de cada clase de edad.
El sistema auxiliar se transforma en el `sistema agregado`

$$U \cdot X_{n+1} = U \cdot S \cdot V \cdot U \cdot X_n \Leftrightarrow Y_{n+1} = U \cdot S \cdot V \cdot Y_n.$$

Modelo con dos escalas de tiempo

Agregación

El equilibrio rápido se descompone como

$$\bar{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1 u_1^T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v_2 u_2^T} \end{pmatrix} = V \cdot U$$

Definimos las `variables globales` como

$$Y(n) = U \cdot X(n) = \begin{pmatrix} x_{11}(n) + x_{12}(n) \\ x_{21}(n) + x_{22}(n) \end{pmatrix}$$

representan la densidad de individuos de cada clase de edad.

El sistema auxiliar se transforma en el `sistema agregado`

$$U \cdot X_{n+1} = U \cdot S \cdot V \cdot U \cdot X_n \Leftrightarrow Y_{n+1} = U \cdot S \cdot V \cdot Y_n.$$

Modelo con dos escalas de tiempo

Agregación

El equilibrio rápido se descompone como

$$\bar{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1 u_1^T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v_2 u_2^T} \end{pmatrix} = V \cdot U$$

Definimos las `variables globales` como

$$Y(n) = U \cdot X(n) = \begin{pmatrix} x_{11}(n) + x_{12}(n) \\ x_{21}(n) + x_{22}(n) \end{pmatrix}$$

representan la densidad de individuos de cada clase de edad.
El sistema auxiliar se transforma en el `sistema agregado`

$$U \cdot X_{n+1} = U \cdot S \cdot V \cdot U \cdot X_n \Leftrightarrow Y_{n+1} = U \cdot S \cdot V \cdot Y_n.$$

Modelo con dos escalas de tiempo

Agregación

En el ejemplo, el sistema general es

$$\begin{pmatrix} x_{11}(n+1) \\ x_{12}(n+1) \\ x_{21}(n+1) \\ x_{22}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{21} & 0 \\ 0 & f_{12} & 0 & f_{22} \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-h_{12} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{21} & 1-h_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_{12} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & 1-p_{21} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_{11}(n) \\ x_{12}(n) \\ x_{21}(n) \\ x_{22}(n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

y el sistema agregado es

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}v_{11} + f_{21}v_{12} & f_{12}v_{21} + f_{22}v_{22} \\ s_1 v_{11} + s_2 v_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix}$$

Cierto tipo de equilibrios y su estabilidad de este sistema se trasladan al sistema general.
Estudio cualitativo en función de los parámatros del modelo.

Modelo con dos escalas de tiempo

Agregación

En el ejemplo, el sistema general es

$$\begin{pmatrix} x_{11}(n+1) \\ x_{12}(n+1) \\ x_{21}(n+1) \\ x_{22}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{21} & 0 \\ 0 & f_{12} & 0 & f_{22} \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-h_{12} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{21} & 1-h_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_{12} & p_{12} \\ 0 & 0 & p_{21} & 1-p_{21} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_{11}(n) \\ x_{12}(n) \\ x_{21}(n) \\ x_{22}(n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

y el sistema agregado es

$$\begin{pmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}v_{11} + f_{21}v_{12} & f_{12}v_{21} + f_{22}v_{22} \\ s_1 v_{11} + s_2 v_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix}$$

Cierto tipo de equilibrios y su estabilidad de este sistema se trasladan al sistema general.
Estudio cualitativo en función de los parámatros del modelo.

Modelo con dos escalas de tiempo

En general [1]

- dos procesos, uno lento (S) y otro rápido (F).
- las matrices $\mathcal{F}$ y $\mathcal{S} \equiv$ funciones F, S.
- el producto se traduce por composición de funciones.

Las ecuaciones del `sistema general` son

$$X_{k,n+1} = S\left(F^{(k)}(X_{k,n})\right), \qquad n = 0, 1, 2 \cdots,$$

El subíndice k indica la ratio entre escalas de tiempo. [1] Sanz, L; Bravo de la Parra, R; Sánchez, E. *Approximate reduction of non-linear discrete models with two time scales.* (2008) Journal of Difference Equatios and Applications. 1-21.

Modelo con dos escalas de tiempo

En general [1]

- dos procesos, uno lento (S) y otro rápido (F).
- las matrices $\mathcal{F}$ y $\mathcal{S} \equiv$ funciones F, S.
- el producto se traduce por composición de funciones.

Las ecuaciones del `sistema general` son

$$X_{k,n+1} = S\left(F^{(k)}(X_{k,n})\right), \qquad n = 0, 1, 2 \cdots,$$

El subíndice k indica la ratio entre escalas de tiempo.

[1] Sanz, L; Bravo de la Parra, R; Sánchez, E. *Approximate reduction of non-linear discrete models with two time scales.* (2008) Journal of Difference Equatios and Applications. 1-21.

Hipótesis 1:
Equilibrio rápido

Hipótesis 1: el proceso rápido alcanza un equilibrio, es decir

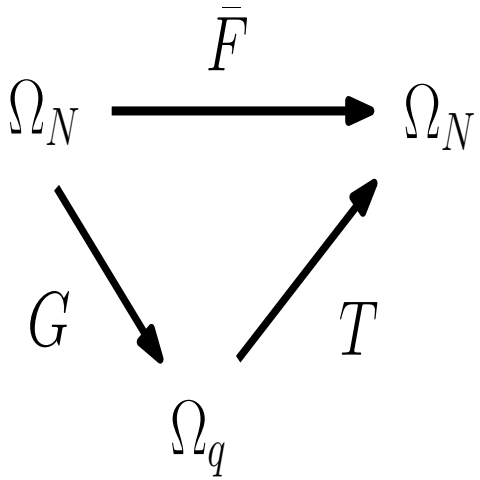
$$\exists \bar{F} : \Omega_N \to \Omega_N, \qquad \lim_{k\to\infty} F^{(k)}(X) = \bar{F}(X), \qquad \forall\, X \in \Omega_N \subset \mathbb{R}^N.$$

Obtenemos el `sistema auxiliar`

$$X(n+1) = S\left(\bar{F}(X_n)\right).$$

Hipótesis 2:
Descomposición

El equilibrio rápido se descompone de forma adecuada: $\bar{F} = T \circ G$.



Con $\Omega_q \subset \mathbb{R}^q$, $q \ll N$

Definimos las variables globales

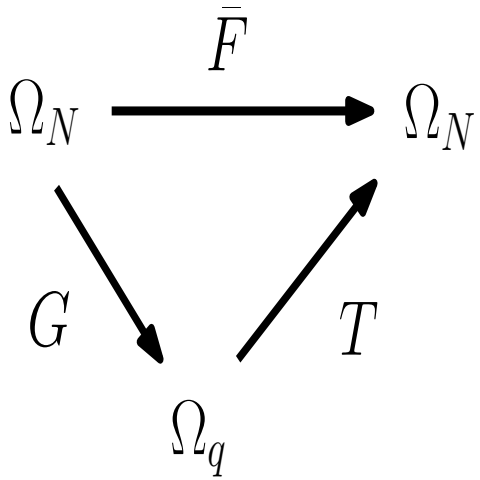
$Y_{n+1} = G(X_n) \in \mathbb{R}^q$

Obtenemos el `sistema agregado`

$$Y_{n+1} = G \circ S \circ T(Y_n).$$

Hipótesis 2:
Descomposición

El equilibrio rápido se descompone de forma adecuada: $\bar{F} = T \circ G$.



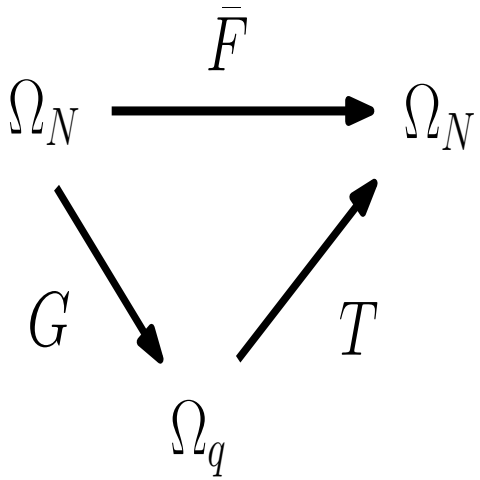
- Con $\Omega_q \subset \mathbb{R}^q$, $q \ll N$
- Definimos las variables globales $Y_{n+1} = G(X_n) \in \mathbb{R}^q$

Obtenemos el `sistema agregado`

$$Y_{n+1} = G \circ S \circ T(Y_n).$$

Hipótesis 2:
Descomposición

El equilibrio rápido se descompone de forma adecuada: $\bar{F} = T \circ G$.



- Con $\Omega_q \subset \mathbb{R}^q$, $q \ll N$
- Definimos las variables globales $Y_{n+1} = G(X_n) \in \mathbb{R}^q$

Obtenemos el `sistema agregado`

$$Y_{n+1} = G \circ S \circ T(Y_n).$$

Comparación para tiempo fijo n

Sistema Agregado y Sistema Auxiliar

	Sistema agregado	Sistema auxiliar
Condición inicial:	Y_0	$G(Y_0) = X_0$
Solución:	Y_n	X_n
Relación:	$Y_n = G(X_n)$	$X_n = T(Y_{n-1})$

Comparación para tiempo fijo n

Hipótesis

Suponer que $\{X_0, X_1, \cdots X_L\} \in \Omega$ abierto acotado tal que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$ uniformemente sobre $\bar{\Omega} \subset \Omega_N$, entonces

Sistema Agregado y Sistema General

	Sistema agregado	Sistema general
Condición inicial:	Y_0	$G(Y_0) = X_0$
Solución:	Y_n	$X_{k,n}$
Relación:	$Y_n = \lim_{k\to\infty} G(X_{k,n})$	$X_{k,n} = \lim_{k\to\infty} T(Y_{n-1})$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots, L$

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

Hipótesis

Existe $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$, $\lim_{k\to\infty} DF^{(k)} = D\bar{F}$ uniformemente sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

Equilibrios

Sea Y^* un equilibrio del sistema agregado. $\exists k_0;\ \forall k \geq k_0$

- Es sistema auxiliar posee un equilibrio $X^* = T(Y^*)$.
- El sistema general posee un punto fijo X_k^*.
- $\lim_{k\to\infty} X_k^* = X^*$.
- Si Y^* es hiperbólico y asintóticamente estable (inestables), también lo son X^* y X_k^*.

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

Hipótesis

Existe $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$, $\lim_{k\to\infty} DF^{(k)} = D\bar{F}$ uniformemente sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

Equilibrios

Sea Y^* un equilibrio del sistema agregado. $\exists k_0;\ \forall k \geq k_0$

- Es sistema auxiliar posee un equilibrio $X^* = T(Y^*)$.
- El sistema general posee un punto fijo X_k^*.
- $\lim_{k\to\infty} X_k^* = X^*$.
- Si Y^* es hiperbólico y asintóticamente estable (inestables), también lo son X^* y X_k^*.

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

Hipótesis

Existe $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$, $\lim_{k\to\infty} DF^{(k)} = D\bar{F}$ uniformemente sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

Equilibrios

Sea Y^* un equilibrio del sistema agregado. $\exists k_0;\ \forall k \geq k_0$

- Es sistema auxiliar posee un equilibrio $X^* = T(Y^*)$.
- El sistema general posee un punto fijo X_k^*.
- $\lim_{k\to\infty} X_k^* = X^*$.
- Si Y^* es hiperbólico y asintóticamente estable (inestables), también lo son X^* y X_k^*.

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

Hipótesis

Existe $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$, $\lim_{k\to\infty} DF^{(k)} = D\bar{F}$ uniformemente sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

Equilibrios

Sea Y^* un equilibrio del sistema agregado. $\exists k_0;\ \forall k \geq k_0$

- Es sistema auxiliar posee un equilibrio $X^* = T(Y^*)$.
- El sistema general posee un punto fijo X_k^*.
- $\lim_{k\to\infty} X_k^* = X^*$.
- Si Y^* es hiperbólico y asintóticamente estable (inestables), también lo son X^* y X_k^*.

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

Hipótesis

Existe $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$, $\lim_{k\to\infty} DF^{(k)} = D\bar{F}$ uniformemente sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

Equilibrios

Sea Y^* un equilibrio del sistema agregado. $\exists k_0;\ \forall k \geq k_0$

- Es sistema auxiliar posee un equilibrio $X^* = T(Y^*)$.
- El sistema general posee un punto fijo X_k^*.
- $\lim_{k\to\infty} X_k^* = X^*$.
- Si Y^* es hiperbólico y asintóticamente estable (inestables), también lo son X^* y X_k^*.

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

HIPÓTESIS

Existe $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$, $\lim_{k\to\infty} DF^{(k)} = D\bar{F}$ uniformemente sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

Cuencas de atracción

Sea Y^* equilibrio hiperbólico asintóticamente estable.
Sea Y_0 tal que $\bar{S}^{(n)}(Y_0) = Y_n \longrightarrow Y^*$.
Entonces, la solución $X_{k,n}$ relativa a $X_0 = T(Y_0)$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} X_{k,n} = X_k^*.$$

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

HIPÓTESIS

Existe $\bar{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\lim_{k\to\infty} F^{(k)} = \bar{F}$, $\lim_{k\to\infty} DF^{(k)} = D\bar{F}$ uniformemente sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$

Cuencas de atracción

Sea Y^* equilibrio hiperbólico asintóticamente estable.
Sea Y_0 tal que $\bar{S}^{(n)}(Y_0) = Y_n \longrightarrow Y^*$.
Entonces, la solución $X_{k,n}$ relativa a $X_0 = T(Y_0)$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} X_{k,n} = X_k^*.$$

Resultados

Comparación comportamiento asintótico ($n \nearrow \infty$)

ADEMÁS

Los resultados anteriores son también ciertos para m-ciclos.

Demografía rápida frente a migraciones

Multiatractores.

Hipótesis

- Demografía rápida tipo Leslie función de variables globales.

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \ , \ \mathcal{F}_i(y) := \begin{pmatrix} 0 & f_{12}^i(y) \\ s_{21}^i(y) & s_{22}^i(y) \end{pmatrix} , \ i = 1, 2$$

- Migraciones lentas

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 1-a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 1-b_1 & 0 & b_2 \\ a_1 & 0 & 1-a_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 1-b_2 \end{pmatrix} \ , \ a_i, b_i \in (0,1) \, , \ i = 1, 2$$

a_i, b_i= proporción de jóvenes/adultos que dejan la zona i.

Demografía rápida frente a migraciones

Multiatractores.

Hipótesis

- Demografía rápida tipo Leslie función de variables globales.

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \ , \ \mathcal{F}_i(y) := \begin{pmatrix} 0 & f^i_{12}(y) \\ s^i_{21}(y) & s^i_{22}(y) \end{pmatrix} , \ i = 1, 2$$

- Migraciones lentas

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 1-a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 1-b_1 & 0 & b_2 \\ a_1 & 0 & 1-a_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 1-b_2 \end{pmatrix} \ , \ a_i, b_i \in (0,1) \, , \ i = 1, 2$$

a_i, b_i= proporción de jóvenes/adultos que dejan la zona i.

Demografía rápida frente a migraciones

Multiatractores.

Resultados

En [2] se prueba que si $\mathcal{F}(y)$ es una matriz estocástica regular dependiente de las variables globales, entonces existe $\bar{\mathcal{F}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ tal que los límites

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(y)^{(k)} = \bar{\mathcal{F}}(y), \qquad \lim_{k\to\infty} D\mathcal{F}^{(k)}(y) = D\bar{\mathcal{F}}(y)$$

son uniformes sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$.

[2] Marvá, M; Sánchez E; Bravo de la Parra, R; Sanz, L; *Reduction of Slow-Fast Discrete Models Coupling Migration and Demography.* (2008) Journal of Theoretical Biology

Variables globales

$$Y_n := \mathcal{U} X_n = \begin{pmatrix} x_n^{11} + (1/t_{12}^1) x_n^{12} \\ x_n^{21} + (1/t_{12}^2) x_n^{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{pmatrix}$$

representan la población en cada región pesada por sus respectivos valores reproductivo.

Modelo agregado

$$\begin{cases} y_{n+1}^1 = \left[u_1^1(1-a_1)v_1^1(y_n^1) + u_2^1(1-b_1)v_2^1(y_n^1)\right] y_n^1 + \left[u_1^1 a_2 v_1^2(y_n^2) + u_2^1 b_2 v_2^2(y_n^2)\right] y_n^2 \\ y_{n+1}^2 = \left[u_1^2 a_1 v_1^1(y_n^1) + u_2^2 b_1 v_2^1(y_n^1)\right] y_n^1 + \left[u_1^2(1-a_2)v_1^2(y_n^2) + u_2^2(1-b_2)v_2^2(y_n^2)\right] y_n^2 \end{cases}$$

ESTUDIO NUMÉRICO

Variables globales

$$Y_n := \mathcal{U} X_n = \begin{pmatrix} x_n^{11} + (1/t_{12}^1) x_n^{12} \\ x_n^{21} + (1/t_{12}^2) x_n^{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{pmatrix}$$

representan la población en cada región pesada por sus respectivos valores reproductivo.

Modelo agregado

$$\begin{cases} y_{n+1}^1 &= \left[u_1^1(1-a_1)v_1^1(y_n^1) + u_2^1(1-b_1)v_2^1(y_n^1)\right] y_n^1 + \left[u_1^1 a_2 v_1^2(y_n^2) + u_2^1 b_2 v_2^2(y_n^2)\right] y_n^2 \\ y_{n+1}^2 &= \left[u_1^2 a_1 v_1^1(y_n^1) + u_2^2 b_1 v_2^1(y_n^1)\right] y_n^1 + \left[u_1^2(1-a_2)v_1^2(y_n^2) + u_2^2(1-b_2)v_2^2(y_n^2)\right] y_n^2 \end{cases}$$

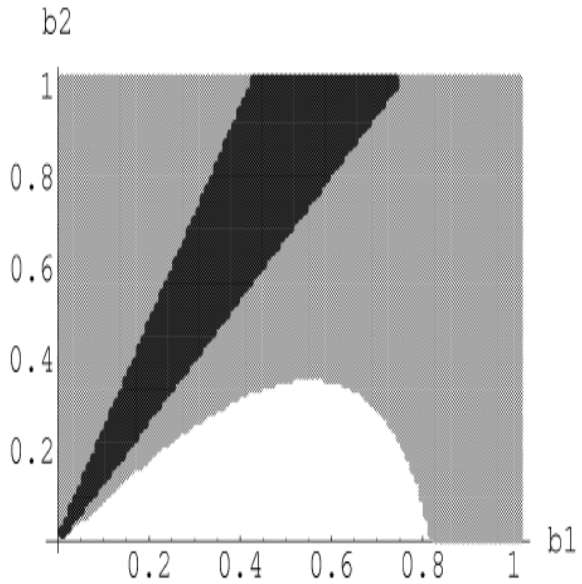
ESTUDIO NUMÉRICO

Demografía rápida frente a migraciones

Multiatractores.

Resultados numéricos

De blanco (ninguno) a negro (dos): número de equilibrios positivos asintóticamente estables en función de b_1 y b_2



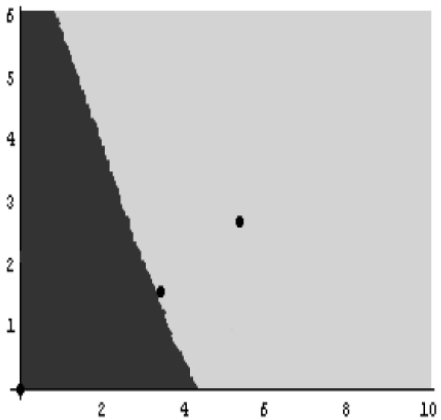
Valores de los parámetros:
$a_1 = 0.1,\ a_2 = 0.3,$
$\alpha_1 = 100,\ \alpha_2 = 45,$
$t_{21}^1 = 0.3,\ t_{21}^2 = 0.1$
$b_1,\ b_2 \in [0.01; 1.0],$
paso 0.005.

Demografía rápida frente a migraciones

Multiatractores.

Resultados numéricos

Cuencas de atracción de cada uno de los equilibrios



Valores de los parámetros:

$a_1 = 0.1,\ a_2 = 0.3,$

$b_1 = 0.3,\ b_2 = 0.7,$

$\alpha_1 = 100,\ \alpha_2 = 45,$

$t_{21}^1 = 0$

Migraciones rápidas frente a demografía

Hipótesis

Consideramos una población:

- no estructurada.
- repartida en dos regiones.
- dinámica local demográfica lenta:

$$(x_{1,n+1}, x_{2,n+1}) = (s_1(x_{1,n}), s_2(x_{2,n})).$$

- migraciones (rápidas) dependientes de variables globales

Migraciones rápidas frente a demografía

Hipótesis

Consideramos una población:

- no estructurada.
- repartida en dos regiones.
- dinámica local demográfica lenta:

$$(x_{1,n+1}, x_{2,n+1}) = (s_1(x_{1,n}), s_2(x_{2,n})).$$

- migraciones (rápidas) dependientes de variables globales

Migraciones rápidas frente a demografía

Hipótesis

Consideramos una población:

- no estructurada.
- repartida en dos regiones.
- dinámica local demográfica lenta:

$$(x_{1,n+1}, x_{2,n+1}) = (s_1(x_{1,n}), s_2(x_{2,n})).$$

- migraciones (rápidas) dependientes de variables globales

Migraciones rápidas frente a demografía

Hipótesis

Consideramos una población:

- no estructurada.
- repartida en dos regiones.
- dinámica local demográfica lenta:

$$(x_{1,n+1}, x_{2,n+1}) = (s_1(x_{1,n}), s_2(x_{2,n})).$$

- migraciones (rápidas) dependientes de variables globales

Migraciones rápidas frente a demografía

Hipótesis

Consideramos una población:

- no estructurada.
- repartida en dos regiones.
- dinámica local demográfica lenta:

$$(x_{1,n+1}, x_{2,n+1}) = (s_1(x_{1,n}), s_2(x_{2,n})).$$

- migraciones (rápidas) dependientes de variables globales

Migraciones rápidas frente a demografía

Reinterpretación de modelos clásicos.

Dinámica local malthusiana suminero-fuente: Zona i

$$x_{i,n+1} = d_i x_{i,n} \qquad , 0 < d_1 < 1 < d_2$$

Modelo	Tasas de migración
Beverton-Holt	
$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{1+\beta y_n}$	$a(y) := \frac{\alpha - d_1(1+\beta y)}{d_2 - d_1}$; $b(y) := \frac{d_2(1+\beta y)-\alpha}{d_2-d_1}$
Ecuación de Ricker	
$y_{n+1} = e^{r(1-y_n/K)} y_n$	$a(y) := \frac{e^{r(1-y/K)} - d_1}{d_2 - d_1}$; $b(y) := \frac{d_2 - e^{r(1-y/K)}}{d_2 - d_1}$

Migraciones rápidas frente a demografía

Reinterpretación de modelos clásicos.

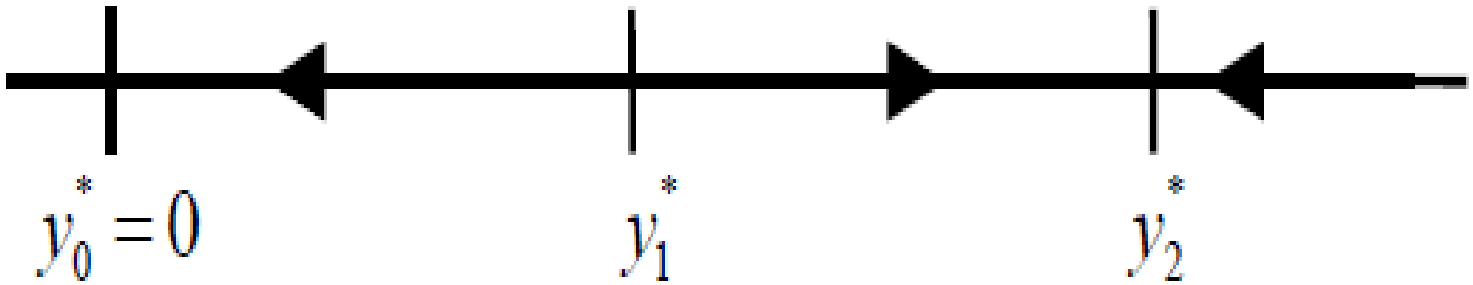
Dinámica local malthusiana suminero-fuente: Zona i

$$x_{i,n+1} = d_i x_{i,n} \qquad , 0 < d_1 < 1 < d_2$$

Modelo	Tasas de migración
Beverton-Holt	
$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n}{1+\beta y_n}$	$a(y) := \frac{\alpha - d_1(1+\beta y)}{d_2 - d_1}$; $b(y) := \frac{d_2(1+\beta y)-\alpha}{d_2-d_1}$
Ecuación de Ricker	
$y_{n+1} = e^{r(1-y_n/K)} y_n$	$a(y) := \frac{e^{r(1-y/K)} - d_1}{d_2 - d_1}$; $b(y) := \frac{d_2 - e^{r(1-y/K)}}{d_2 - d_1}$

Migraciones rápidas frente a demografía
EFECTO ALLEE.

Efecto Allee: poblaciones por debajo de un determinado umbral son inviables y se extinguen.



Una fuente entre dos sumideros (uno de ellos, $y_0^* = 0$).

Migraciones rápidas frente a demografía

Efecto Allee.

Demografía local	Tasas de migración
Malthus sumidero-fuente	
$x_{i,n+1} = d_i x_{i,n}$	$a(y) := \frac{y^2}{y^2+\beta}$; $b(y) := \frac{y^2+\beta}{y^2+\delta}$
$0 < d_1 < 1 < d_2$	$0 < \beta < \delta$

Beverton-Holt sumidero-fuente

$$x_{i,n+1} = \frac{d_i x_{i,n}}{1 + c_i x_{i,n}} \qquad a(y) := \frac{y}{1+y} \quad ; \quad b(y) := \frac{1}{1+y}$$

$0 < d_1 < 1 < d_2, \qquad 0 < c_i$

Migraciones rápidas frente a demografía

Efecto Allee

Hay valores de los parámetros tales que el sistema agregado

- tiene tres equilibrios

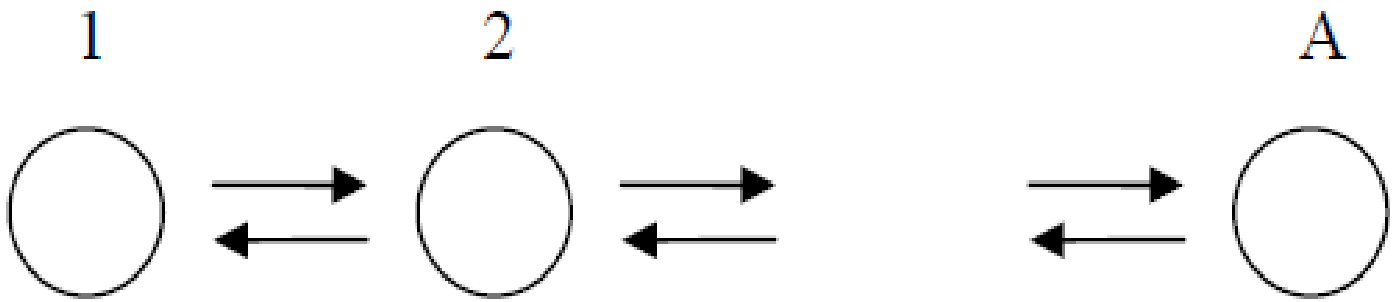
$$y_0^* = 0 < y_1^* < y_2^*$$

- y_0^*, y_2^* sumideros.
- y_1^* fuente: umbral de persistencia de la población.

Migraciones rápidas frente a demografía

Hospedadores y parasitoides en una cadena.

Suponemos *A* regiones encadenadas.



- Cada indivíduo puede migrar a zonas adyacentes.
- Los hospedadores migran de forma aleatoria.
- Los parasitoides migran en función de los que hagan los hospedadores.

Migraciones rápidas frente a demografía

Hospedadores y parasitoides en una cadena.

En la región *i*-ésima

1. Interacción hospedador (H)-parasitoide (P) lenta (Nicholson Bayley):

$$\begin{cases} H_{i,n+1} = \lambda_i H_{i,n} e^{-a_i P_n} \\ P_{i,n+1} = C_i H_{i,n}(1 - e^{-a_i P_{i,n}}) \end{cases}$$

2. Migraciones rápidas:

$$\begin{pmatrix} H_{i,n+1} \\ P_{i,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2(H_{i,n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{i,n} \\ P_{i,n} \end{pmatrix}$$

Con $\mathcal{F}_j$ estocástica regular.

Migraciones rápidas frente a demografía

Hospedadores y parasitoides en una cadena.

En la región *i*-ésima

1. Interacción hospedador (H)-parasitoide (P) lenta (Nicholson Bayley):

$$\begin{cases} H_{i,n+1} = \lambda_i H_{i,n} e^{-a_i P_n} \\ P_{i,n+1} = C_i H_{i,n}(1 - e^{-a_i P_{i,n}}) \end{cases}$$

2. Migraciones rápidas:

$$\begin{pmatrix} H_{i,n+1} \\ P_{i,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2(H_{i,n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{i,n} \\ P_{i,n} \end{pmatrix}$$

Con $\mathcal{F}_j$ estocástica regular.

Demografía rápida frente a migraciones

Resultados

Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} X^1_{k,n+1} \\ X^2_{k,n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{S} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2(X^1_{k,n}) \end{pmatrix}^{(k)} \cdot \begin{pmatrix} X^1_{k,n} \\ X^2_{k,n} \end{pmatrix}$$

en [3] se prueba que si $\mathcal{F}_i$ son matrices estocásticas regulares, entonces $\exists \bar{\mathcal{F}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$;

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}^{(k)}(X_2) = \bar{\mathcal{F}}(X_2), \qquad \lim_{k\to\infty} D\mathcal{F}^{(k)}(X_2) = D\bar{\mathcal{F}}(X_2)$$

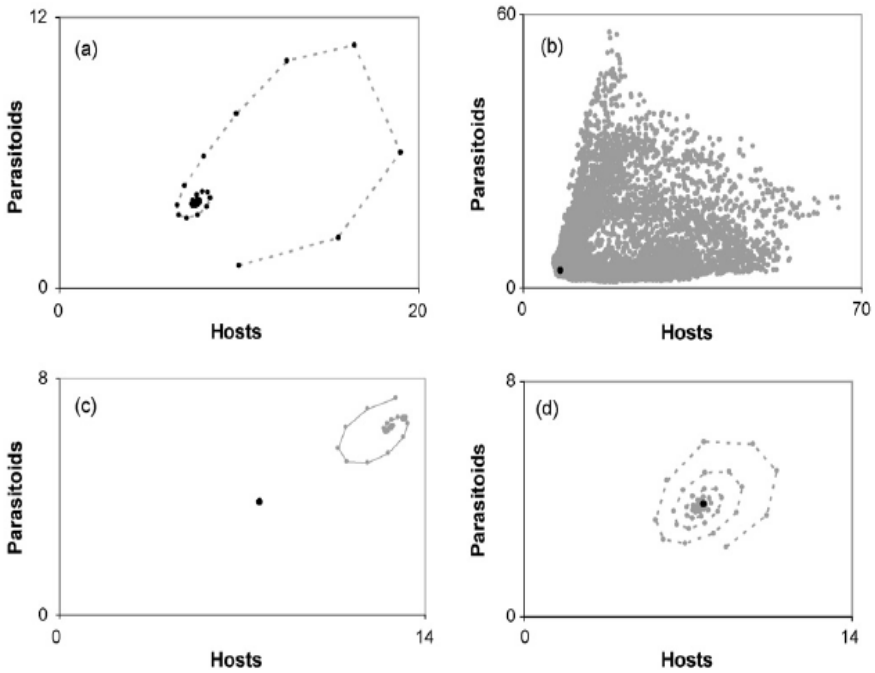
son uniformes sobre un compacto $K \subset \mathbb{R}^N$.

[3] Tri Nguyen Huu, Pierre Auger, Chrisphe Lett, Marcos Marvá. *Emergence of global behaviour in a host-parasitoid model with density-dependent dispersal in a chain of patches*. Ecological Complexity 5 (2008), 9-21.

Migraciones rápidas frente a demografía

Hospedadores y parasitoides en una cadena.

Se prueba que, para ciertos valores de los parámetros, el sistema agregado posee un equilibrio estable

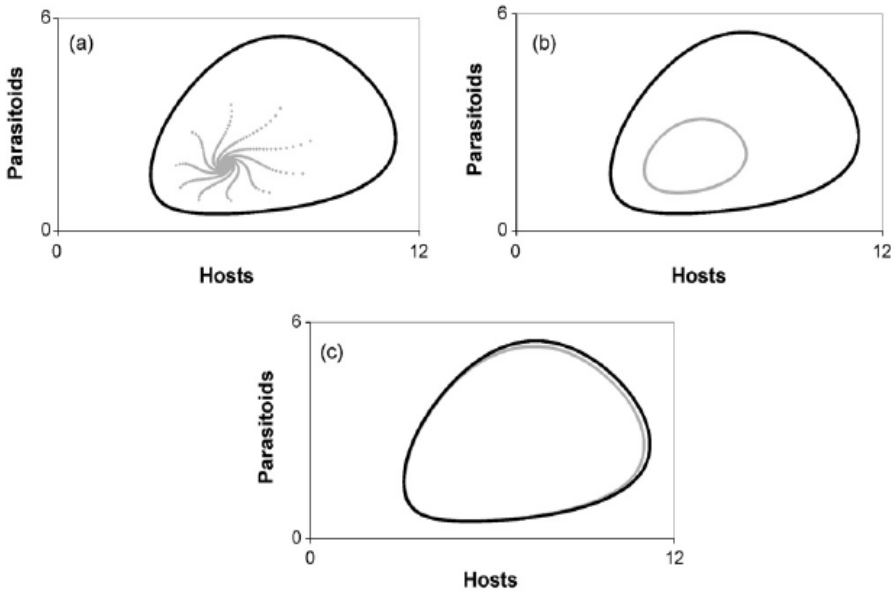


$A = 5$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 4$,
$f = 0.2$, $\lambda_i = 2$, $a_i = 0.5$, $c_i = 1$,
$i \in [1, 2, \cdots, 5]$.
(a) Trayectoria sistema agregado.
(b), (c), (d) Trayectoria sistema general para $k = 2, 4, 50$.

Migraciones rápidas frente a demografía

Hospedadores y parasitoides en una cadena.

Experimentos numéricos sugieren que la existencia de una curva invariante para el sistema agregado implica su existencia para el sistema general.



$A = 5$, $\alpha = 2.3$, $\beta = 3$,
$f = 0.2$, $\lambda_i = 2$, $a_i = 0.5$, $c_i = 1$,
$i \in [1, 2, \cdots, 5]$.
Negro: trayectoria sistema agregado.
Gris: trayectoria sistema general (a), (b), (c) para $k = 2, 4, 50$.

Buscamos resultados teóricos que avalen esta relación.