MODELOS CON ESCALAS DE TIEMPOS:

AGREGACIÓN APROXIMADA Y APLICACIONES

P. Auger, R. Bravo, L. Sanz, M. Marvá, J.-C. Poggiale, E. Sánchez

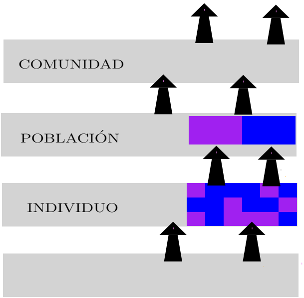
Departamento de Matemáticas

Universidad de Alcalá

16.5.2012

¿Escalas de tiempo?

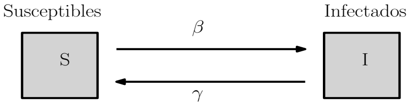
Modelos de compartimentos o modelos jerarquizados



- $X(t)$ variables de estado en tiempo t.
- Procesos rápido F y proceso lento S.

Epidemia S-I con desplazamientos rápidos

Población sufre una epidemia



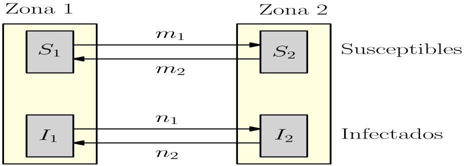
$$\begin{cases} \dfrac{dS}{d\tau} = -\beta \dfrac{I}{S+I} S + \gamma I \\[2ex] \dfrac{dI}{d\tau} = \beta \dfrac{I}{S+I} S - \gamma I \end{cases}$$

Número reproductivo $R_0 := \beta/\gamma$

- Si $R_0 < 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} (S(t), I(t)) = (N, 0)$ $\quad$ N población total
- Si $R_0 > 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} (S(t), I(t)) = (N\gamma/\beta, N(1-\gamma/\beta))$.

Epidemia S-I con desplazamientos rápidos

Población repartida en dos zonas



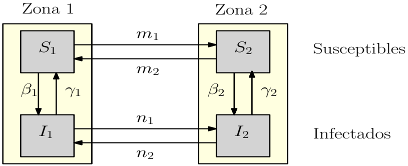
$$\begin{cases} \dfrac{dS_1}{d\tau} = -m_1 S_1 + m_2 S_2 \\[2ex] \dfrac{dS_2}{d\tau} = m_1 S_1 - m_2 S_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dI_1}{d\tau} = -n_1 I_1 + n_2 I_2 \\[2ex] \dfrac{dI_2}{d\tau} = n_1 I_1 - n_2 I_2 \end{cases}$$

Equilibrios asint. estables

$$\lim_{t\to\infty} (S_1(t), S_2(t)) = \left(\frac{m_2\, S}{m_1 + m_2}, \frac{m_1\, S}{m_1 + m_2} \right) = (\mu_1, \mu_2) S$$

$$\lim_{t\to\infty} (I_1(t), I_2(t)) = \left(\frac{n_2\, I}{n_1 + n_2}, \frac{n_1\, I}{n_1 + n_2} \right) = (\nu_1, \nu_2) I$$

Epidemia S-I con desplazamientos rápidos



$$
\begin{cases}
S_1' = -m_1 S_1 + m_2 S_2 + \varepsilon \left(-\beta_1 \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} + \gamma_1 I_1 \right) \\[2ex]
S_2' = m_1 S_1 - m_2 S_2 + \varepsilon \left(-\beta_2 \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} + \gamma_2 I_2 \right) \\[2ex]
I_1' = -n_1 I_1 + n_2 I_2 + \varepsilon \left(\beta_1 \frac{S_1 I_1}{S_1 + I_1} - \gamma_1 I_1 \right) \\[2ex]
I_2' = n_1 I_1 - n_2 I_2 + \varepsilon \left(\beta_2 \frac{S_2 I_2}{S_2 + I_2} - \gamma_2 I_2 \right)
\end{cases}
\qquad 0 < \varepsilon \sim 0
$$

Epidemia S-I con desplazamientos rápidos.

- Existen `variables lentas`; invariantes por el proceso rápido

$$S := S_1 + S_2 \qquad I := I_1 + I_2$$

  y sus ecuaciones

- Existen atractores para el proceso rápido

$$\lim_{t\to\infty} S_j(t) = \mu_j S \qquad \lim_{t\to\infty} I_j(t) = \nu_j I \qquad j = 1,2$$

- Si el proceso rápido fuera "instantaneo" ($\varepsilon \to 0$),
  sustituir variables rápidas por "equilibrios rápidos". Sistema reducido

$$\begin{cases} S' = -\left(\frac{\beta_1\mu_1\nu_1}{\mu_1 S+\nu_1 I} + \frac{\beta_2\mu_2\nu_2}{\mu_2 S+\nu_2 I}\right) SI + (\nu_1\beta_1 + \nu_2\beta_2) I \\ \\ I' = \left(\frac{\beta_1\mu_1\nu_1}{\mu_1 S+\nu_1 I} + \frac{\beta_2\mu_2\nu_2}{\mu_2 S+\nu_2 I}\right) SI - (\nu_1\beta_1 + \nu_2\beta_2) I \end{cases}$$

- Teoremas de Fenichel: si $\varepsilon \sim 0$, entonces

$$(S_1, S_2, I_1, I_2) = \Psi(S, I, \varepsilon)$$

Epidemia S-I con desplazamientos rápidos

Enfermedad ¿*globalmente* erradicada ó endémica?
Número reproductivo global

$$\bar{R}_0 := \frac{\nu_1\beta_1 + \nu_2\beta_2}{\nu_1\gamma_1 + \nu_2\gamma_2}$$

$$\lim_{t\to\infty} (S(t), I(t)) = (S^*, I^*) \text{ con } \begin{cases} I^* = 0 & \text{si} \quad \bar{R}_0 < 1 \\ I^* > 0 & \text{si} \quad \bar{R}_0 > 1 \end{cases}$$

Teoremas de Fenichel; para $\varepsilon \sim 0$,

$$\lim_{t\to\infty} (S_1(t), S_2(t), I_1(t), I_2(t)) = (\mu_1 S^*, \mu_2 S^*, \nu_1 I^*, \nu_2 I^*)$$

¿Influencia de los desplazamientos rápidos? $R_0^{(k)}$ vs. $\bar{R}_0$

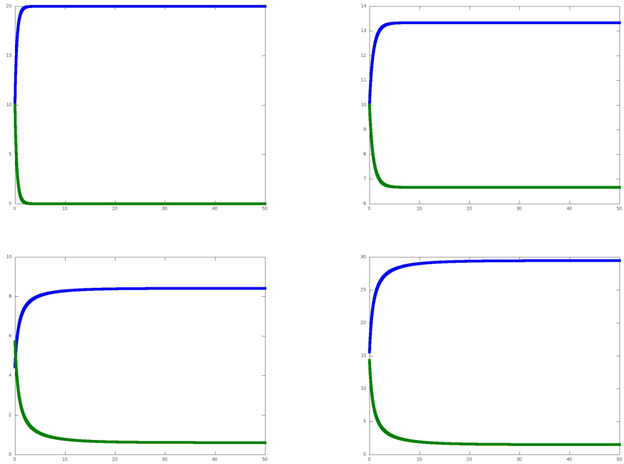
- Si $\beta_1 = \beta_2$ y $\gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow R_0^1 = R_0^2 = \bar{R}_0$

- Si $\beta_1 < \beta_2$ y $\gamma_1 > \gamma_2 \Rightarrow R_0^1 < \bar{R}_0 < R_0^2$

ZONA 1 ZONA 2

A

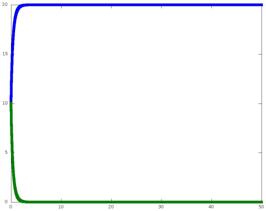
C

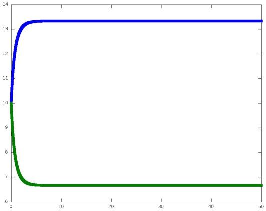


azul: susceptibles verde: infectados

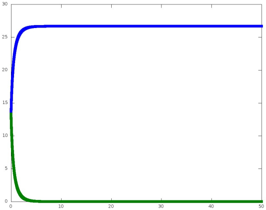
$$m_1 = 7;\ m_2 = 2;\ n_1 = 5;\ m_2 = 2; \beta_1 = 2; \beta_2 = 3; \gamma_1 = 4;\ \gamma_2 = 2$$

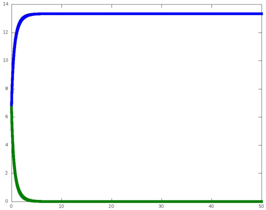
ZONA 1 | ZONA 2





A



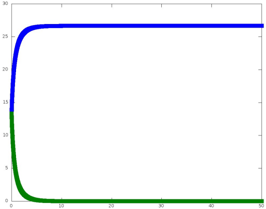


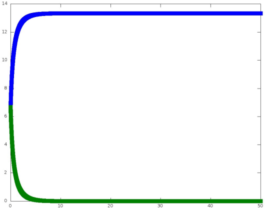
C

azul: susceptibles   verde: infectados

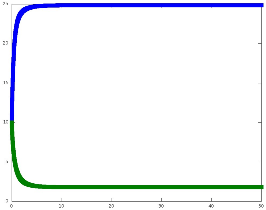
$$m_1 = 1;\ m_2 = 2;\ n_1 = 1;\ m_2 = 2; \beta_1 = 2; \beta_2 = 3; \gamma_1 = 4;\ \gamma_2 = 2$$

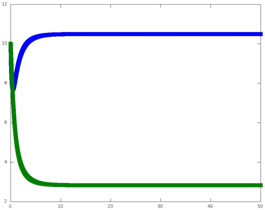
ZONA 1 | ZONA 2





$\varepsilon \sim 0$





$\varepsilon = 1$

azul: susceptibles | verde: infectados

$$m_1 = 1;\ m_2 = 2;\ n_1 = 1;\ m_2 = 2; \beta_1 = 2; \beta_2 = 3; \gamma_1 = 4;\ \gamma_2 = 2$$

Ecuaciones en diferencias

Las variables de estado cambian conforme a incrementes fijos de tiempo: diaria, semanal, anualmente... procesos demográficos, migratorios, intereses bancarios,...

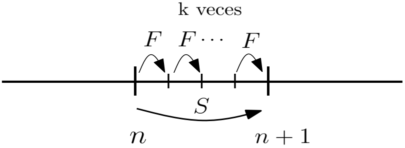
$$X_0 \Rightarrow X_1 = S \circ \overbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}^{12\ \textit{veces}}(X_0) \Rightarrow X_2 = S \circ \overbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}^{12\ \textit{veces}}(X_1)$$

Ecuaciones en diferencias

Las variables de estado cambian conforme a incrementes fijos de tiempo: diaria, semanal, anualmente... procesos demográficos, migratorios, intereses bancarios,...

$$X_0 \Rightarrow X_1 = S \circ \overbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}^{k \text{ veces}}(X_0) \Rightarrow X_2 = S \circ \overbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}^{k \text{ veces}}(X_1)$$

$$\Downarrow$$



Si la ratio entre los procesos lento y rápido es k

$$\boxed{X_{n+1,k} = S \circ F^{(k)}(X_{n,k})}$$

$$X_{n+1,k} = S \circ F^{(k)}(X_{n,k})$$

H1: la dinámica rápida alcanza un estado de equilibrio instantaneamente. Es decir, existe

$$\bar{F}(X) = \lim_{k \to \infty} F^{(k)}(X)$$

permite aproximar $X_{n+1,k} = S \circ F^{(k)}(X_{n,k}) \sim X_{n+1} = S \circ \bar{F}(X_n)$

H2: existen ”variables globales” invariantes por la dinámica rápida.

H3: otras hipótesis técnicas.

RESULTADOS

Si k suficientemente grande, podemos reconstruir el comportamiento del modelo completo a partir del sistema reducido.

Preguntas?

También disponible para

- Sistemas discretos no autónomos.
- Sistemas discretos estocásticos.
- Sistemas de EDO no autónomos:
  - periódicos.
  - asintóticamente autónomos.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo.
- Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

Hay multitud de modelos descritos.