Hoja de problemas sobre funciones de varias variables: derivadas parciales, derivadas direccionales y gradiente. Cálculo de extremos relativos.

1. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones: Usaremos la notación $f'_x(x,y)$ para referirnos a $f'_x(x,y)$ por ser más compacta. Las derivadas de segundo orden se calculan de forma análoga a las de primer orden; hay que tener cuidado con las derivadas "cruzadas", en las que se deriva primero respecto de una variabley después respecto de la otra. Recuerda que el resultado dederivas una función primero despecto de x y después respecto de y es elmismoque si derivamosprimeros respecto de$y$ y después respecto de x. Es decir, $f''_{xy} = f''_{yx}$:

   a) $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2 \operatorname{sen}(xy)$
   - $f'_x(x,y) = 6\,x + 5\,y^3 \cos(x\,y)$
   - $f'_y(x,y) = 5\,x\,y^2 \cos(x\,y) + 10\,y \sin(x\,y)$
   - $f''_x(x,y) = 6 - 5\,y^4 \sin(x\,y)$
   - $f'_{xy}(x,y) = 15\,y^2 \cos(x\,y) - 5\,x\,y^3 \sin(x\,y)$
   - $f''_y(x,y) = 20\,x\,y \cos(x\,y) - 5\,x^2\,y^2 \sin(x\,y) + 10 \sin(x\,y)$

   b) $f(x,y) = e^{\cos(x+y)}$
   - $f'_x(x,y) = -\sin(x+y)e^{\cos(x+y)}$
   - $f'_y(x,y) = -\sin(x+y)e^{\cos(x+y)}$
   - $f''_x(x,y) = \sin^2(x+y)e^{\cos(x+y)} - e^{\cos(x+y)}$
   - $f'_{xy}(x,y) = \sin^2(x+y)e^{\cos(x+y)} - e^{\cos(x+y)}$
   - $f''_y(x,y) = \sin^2(x+y)e^{\cos(x+y)} - e^{\cos(x+y)}$

2. Recuerda que la derivada direccional se puede calcular como el producto escalar entre el vector gradiente en el punto P y el vector unitario paralelo a $\vec{v}$. Es decir, si $\vec{v}$ no es unitario, hay que normalizarlo (y lo denotaremos por $\vec{w}$).

   a) $f(x,y) = x - 4x^2y + y^2, \quad P = (1,2), \quad \bar{v} = (3,4).$
   - $\nabla f(x,y) = (1 - 8\,x\,y, 2\,y - 4\,x^2).$
   - $\vec{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
   - La derivada direccional vale $(-9,0) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -12$

   b) $f(x,y,z) = xyz, \quad P = (1,0,1), \quad \bar{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$
   - $\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy).$
   - El vector $\vec{v}$ ya es unitario.
   - La derivada direccional vale $(0,1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

   c) $f(x,y) = xye^{xy}, \quad P = (1,-1), \quad \bar{v} = (1,1).$
   - $\nabla f(x,y) = \left(e^{x\,y}\,x\,y^2 + e^{x\,y}\,y,\ e^{x\,y}\,, x^2\,y + e^{x\,y}\,x\right).$
   - $\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   - La derivada direccional vale $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{-2}{e^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}e^2}$

3. En todos los casos se trata de calcular el módulo del vector gradiente en el punto P.

   a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \qquad \bar{a} = (1,1)$
   1) El gradiente es $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2\,y}{y^2+2\,x\,y+x^2}, \frac{-2\,x}{y^2+2\,x\,y+x^2}\right)$
   2) El vector gradiente en P y su módulo valen $\left\|\left(\frac{6}{25}, \frac{-4}{25}\right)\right\| = \frac{2\sqrt{13}}{25}$

   b) $f(x,y) = x^3e^x\frac{1}{2x+3y} \qquad P = (2,1)$
   1) El gradiente es
   $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\left(3\,e^x\,x^3 + 9\,e^x\,x^2\right)\,y + 2\,e^x\,x^4 + 4\,e^x\,x^3}{9\,y^2 + 12\,x\,y + 4\,x^2}, \frac{3\,e^x\,x^3}{9\,y^2 + 12\,x\,y + 4\,x^2}\right)$$
   2) El vector gradiente en P y su módulo valen $\left\|\left(\frac{56\,e^2+68\,e^2}{49}, -\frac{24\,e^2}{49}\right)\right\| = \sqrt{\frac{(56\,e^2+68\,e^2)^2}{2401} + \frac{576\,e^4}{2401}}$

4. La idea es obtener el vector normal a la superficie en el punto indicado. Con esa información es sencillo determinar larecta y el plano pedidos. El primer apartadose resuelve con más detalle, el resto se hace de forma totalmente análoga.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $P = (3,4,25)$.
   Como $z = x^2+y^2$, definimos la función $F(x,y,z) = x^2+y^2-z$, de forma que la superficie $\mathcal{S}$ con la que trabajamos sea la superficie de nivel dada por $F(x,y,z) = 0$. Ahora, sabemos que el vector gradiente de $F(x,y,z)$ en P es normal a la superficie de nivel.

   $$\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, -1) \text{ y } \nabla F(1,2,5) = (2,4,-1)$$

   Las ecuaciones paramétricas de la recta normal

   $$r \equiv \begin{cases} x &= 1+2\lambda \\ y &= 2+4\lambda \\ z &= 5-\lambda \end{cases}$$

   El plano tangente en P lo forman aquellos puntos de coordenadas $Q = (x,y,z)$ tales que el vector $\vec{PQ} = (x-1, y-2, z-5)$ es perpendicular al vector normal, es decir, cuyo producto escalar vale 0:

   $$\pi \equiv (x-1, y-2, z-5)\cdot(2,4,-1) = 2x+4y-z-4 = 0$$

   b) $f(x,y) = \frac{xy+7}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $P = (3,-4,-1)$.

   $$\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{y^3\sqrt{y^2+x^2}}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}, \frac{x^3\sqrt{y^2+x^2}}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}\right)$$

   $$\nabla F(3,-1,-1) = \left(\frac{-64}{125}, \frac{27}{125}, -1\right)$$

   Las ecuaciones paramétricas de la recta normal

   $$r \equiv \begin{cases} x &= 3+\frac{-64}{125}\lambda \\ y &= -4+\frac{27}{125}\lambda \\ z &= -1-\lambda \end{cases}$$

   El plano tangente en P:

   $$\pi \equiv (x-3, y+4, z+1)\left(\frac{-64}{125}, \frac{27}{125}, -1\right) = -64x+27y+z-209 = 0$$

c) $f(x,y) = \text{sen}(xy)$ en $p = (\pi, 1, 0)$.

$$\nabla F(x,y,z) = (y\cos(xy), x\cos(xy), -1)$$
$$\nabla F(\pi,1,0) = (-1, -\pi, -1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta normal

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \pi - \lambda \\ y & = & 1 - \pi\lambda \\ z & = & 0 - \lambda \end{array} \right.$$

El plano tangente en P:

$$\Pi \equiv (x - \pi, y - 1, z)\,(-1, -\pi, -1) = -x - \pi y - z - 2\pi = 0$$

5. Hay que determinar los puntos críticos (aquellos en los que el gradiente es el vector nulo) resolviendo el sistema $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ y clasificar los puntos críticos utilizando el criterio del Hessiano

   a) Hay que resolver el sistema

   $$\left\{ \begin{array}{l} f'_x(x,y) = 2y + 6x = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y + 2x = 0 \end{array} \right.$$

   cuya única solución es $(0,0)$. Ahora, la matriz Hessiana de f es

   $$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   y aplicando el criterio correspondiente (mira la teoría) tenemos que $(0,0)$ es un mínimo relativo.

   b) (0,0) silla

   c) (2,-1) min.

   d) (2,1) y (-2,1) silla, y (0,0) min.

   e) (-1,-1) y (1,1) min.

   f) (1,-2) silla

   g) ninguno

   h) (-1,0) max.

   i) (0,0), (4,0) y (0,-2) silla, y $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ min.

6. 9, 9 y 9.

7. Largo y ancho $\sqrt[3]{2V}$, y alto $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.
8. $x = 3$ e $y = 3$.
9. $(1, -\frac{3}{2})$ mínimo local. No existen extremos absolutos.
10. Mínimo $f(4, 0) = -7$ y máximo $f(4, 5) = 13$.
11. Mínimo $f(0, 0) = 4$ y máximo $f(-1, 1) = f(1, 1) = 7$.
12. Mínimo $f(-2, 4) = -9$ y máximo $f(2, 4) = 3$.