

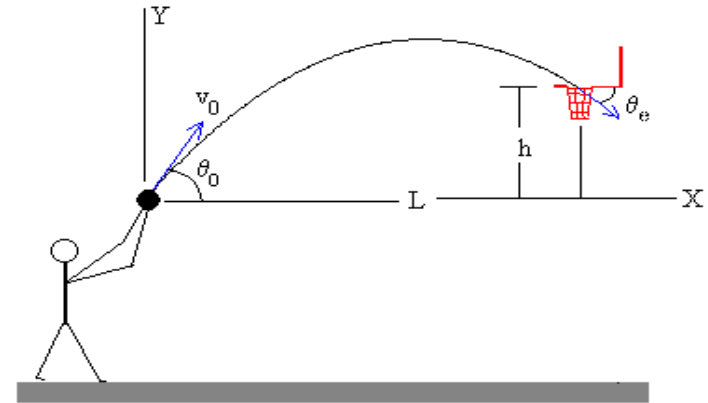
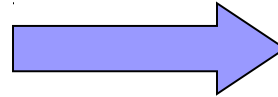
Tema 3:

Probabilidad

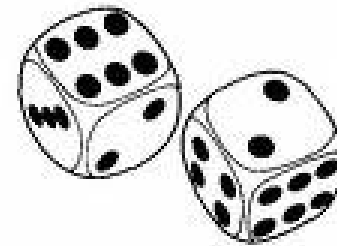
SUCESOS DETERMINISTAS Y ALEATORIOS

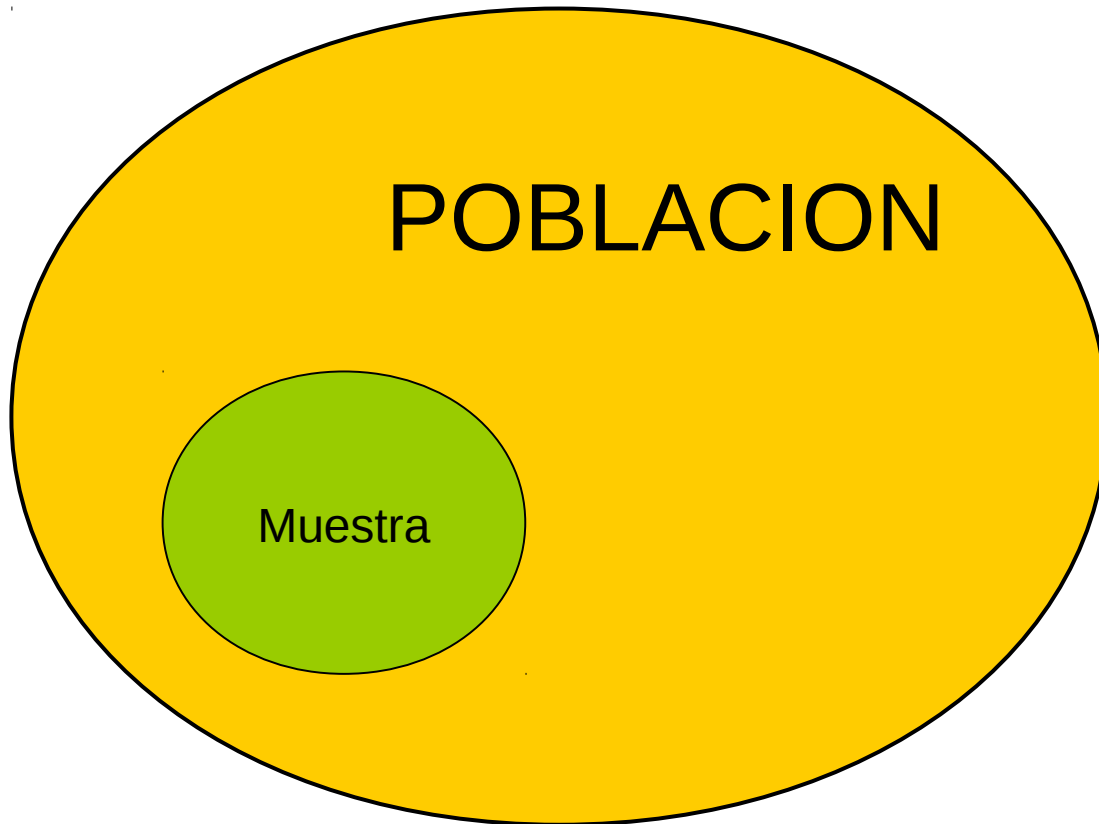
Cuando realizamos un experimento, diremos que es:

- **Determinista**: dadas unas condiciones iniciales, el resultado es siempre el mismo.



- **Aleatorio**: dadas unas condiciones iniciales, conocemos el conjunto de resultados posibles, pero NO el resultado final.





¿Cómo se elige la muestra?
Al azar

Muestras distintas producen
medias, varianzas,
rectas de regresión...distintas

¿En qué medida la muestra
representa a la población?

Probabilidad



- Combinatoria
- Integración

El problema del caballero de Méré

¿Qué es más probable?

(a) obtener al menos 1 seis en 4 tiradas de un dado

(b) obtener al menos 1 seis doble en 24 tiradas de dos dados

Pensaba que debía ser igualmente probable porque

(a) La probabilidad de obtener un seis en cada lanzamiento es $1/6$. Por tanto, en 4 tiradas

$$1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3$$

(b) La probabilidad de obtener un seis doble en cada lanzamiento es $1/36$. Por tanto, en 24 tiradas

$$1/36 + 1/36 + \dots + 1/36 = 24/36 = 2/3$$

Sin embargo,

perdía más a menudo
con la segunda apuesta



Terminología informal sobre sucesos (informal, pero suficiente)

Un **suceso elemental** es cualquiera de los posibles resultados simples de un experimento

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los sucesos elementales

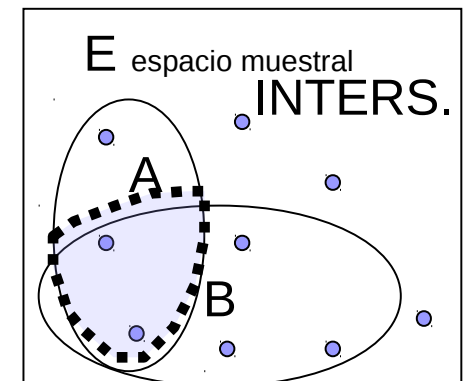
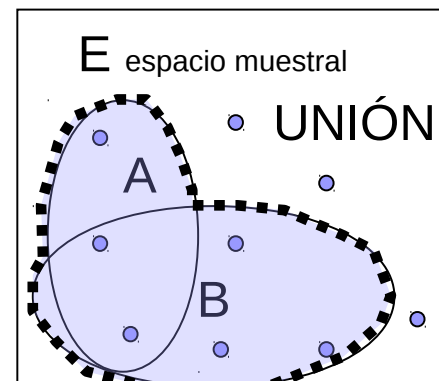
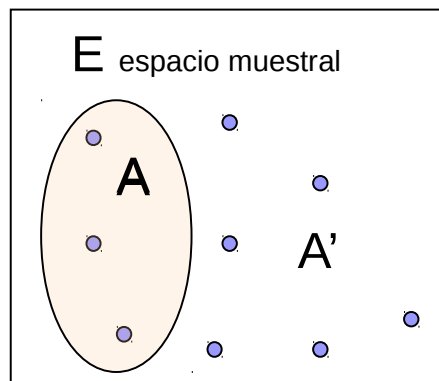
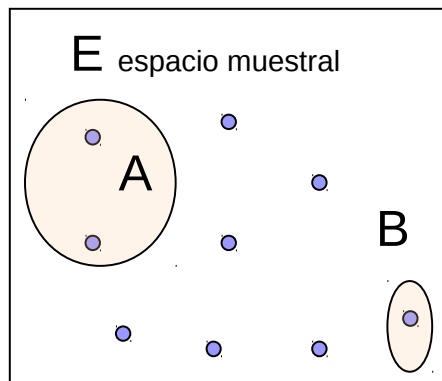
Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral

Sucesos mutuamente excluyentes: que suceda uno hace imposible que suceda el otro (y recíprocamente)

Suceso complementario de A, denotado por A' (A^c , $\bar{A}$) está formado por todos los sucesos que no están en A

Suceso unión de A y B, $A \cup B$ es el formado por los eventos que están en A o en B (o están en ambos)

Suceso intersección de A y B, $A \cap B$ es el formado por los eventos que están en A y B a la vez



EJEMPLO: lanzamiento de un dado.

- Son **sucesos elementales** sacar 1, o sacar 4
- El **espacio muestral** es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Un **suceso** es sacar número par
- Si el dado no está trucado, todos los sucesos elementales son equiprobables
- Son **sucesos mutuamente excluyentes**
 - Sacar un número par y sacar un número impar
 - Sacar 2 y sacar 3 (pero sacar un 2 o un 4 no son excluyentes)
- El **complementario** del evento $A = \{3\}$ es $A' = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
- La **unión** de los sucesos $A = \{2\}$ y $B = \{4\}$ es $A \cup B = \{2, 4\}$
- La **intersección** de los sucesos $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 6\}$ es $A \cap B = \{3, 4\}$

CONCEPCIÓN CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD

Un experimento que está sujeto al azar con n posibles resultados elementales equiprobables* y mutuamente excluyentes.

Si n_A es la cantidad de sucesos que presentan la característica A entonces **la probabilidad de que suceda A** es:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \quad \text{Regla de Lapace}$$

Con esta definición, se cumple $0 \leq P(A) \leq 1$

* es igual de fácil que suceda cualquiera de ellos

Ejemplos:

- Con una baraja española, al sacar una carta ¿cuál es la probabilidad de sacar un número menor o igual que 3?

$$12/40=3/10$$

- Al lanzar un dado perfectamente equilibrado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número impar?

$$3/6=1/2$$

Ejemplo

Versión sencilla del problema del caballero de Méré: lanzar 2 veces un dado

A = obtener al menos un 6 entre las dos tiradas.

Por el método ingenuo

$$P(A) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3 = 12/36$$

Si calculamos el espacio muestral y aplicamos la regla de Laplace:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$$P(A) = 11/36$$

¿Qué hacemos cuando los sucesos no son equiprobables?

CONCEPCIÓN FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad de un suceso es la frecuencia relativa de veces que ocurriría el suceso al repetir el experimento muchas veces.

CLASIFICACION OMS

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	NORMAL	469	46,9%
	OSTEOPENIA	467	46,7%
	OSTEOPOROSIS	64	6,4%
	Total	1000	100,0

- ☐ $P(\text{Normal})=0.469$
- ☐ $P(\text{Osteopenia})=0.467$
- ☐ $P(\text{Osteoporosis})=0.064$

¿Y si el experimento no puede repetirse “demasiadas” veces?

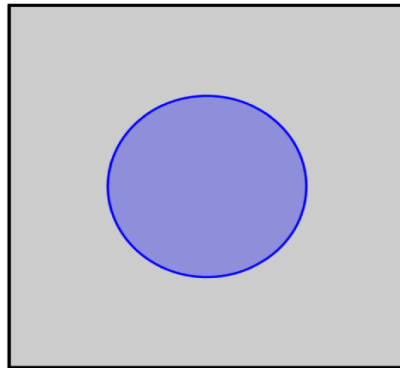
- Control de calidad (tipo destructivo)
- Eventos poco frecuentes (asegurar un evento deportivo)

Limitaciones de las definiciones previas

Ejemplo 1: dos jugadores A y B juegan a lanzar una moneda una vez cada uno. Empieza A. El primero que saque cara gana. ¿Cuántos casos posibles hay?

Ejemplo 2: Si en el intervalo $[0, 1]$ de la recta real elegimos un número al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea $1/3 \leq x \leq 2/3$?

Ejemplo 3: En el centro de un cuadrado de lado 4 se coloca un círculo de radio 1. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un punto al azar éste esté en el círculo?



n = 1



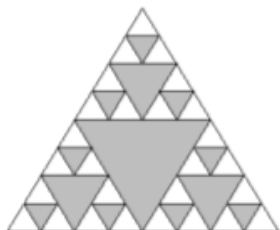
n = 2



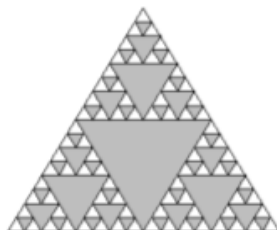
n = 3



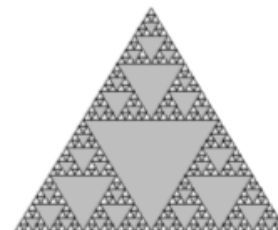
n = 4



n = 5



n = 6



n = 7



n = 8



n = 9

