Tema 4: INFERENCIA ESTADISTICA - IV

Contraste de hipótesis sobre la media

Biología sanitaria 2017/18. Universidad de Alcalá

M. Marvá. Actualizado: 2017-11-13

Ejemplo

Según la normativa el motor de un automóvil no debe emitir más de 5ppm de CO_2. En un control de calidad, se seleccionan 36 coches al azar en distintas plantas de producción y se miden sus emisiones de CO_2. Se obtienen los siguientes datos

$$n = 36, \qquad \bar{X}_* = 5.3ppm, \qquad s = 0.6ppm$$

A la vista de los datos muestrales ¿se supera el límite?

$X =$ "emisi'on de CO_2 (en ppm) de un coche"

- El fabricante asegura los coches cumplen con la normativa:

$$\mu_X \leq 5$$

- Los datos muestrales sugieren lo contrario

$$\mu_X > 5$$

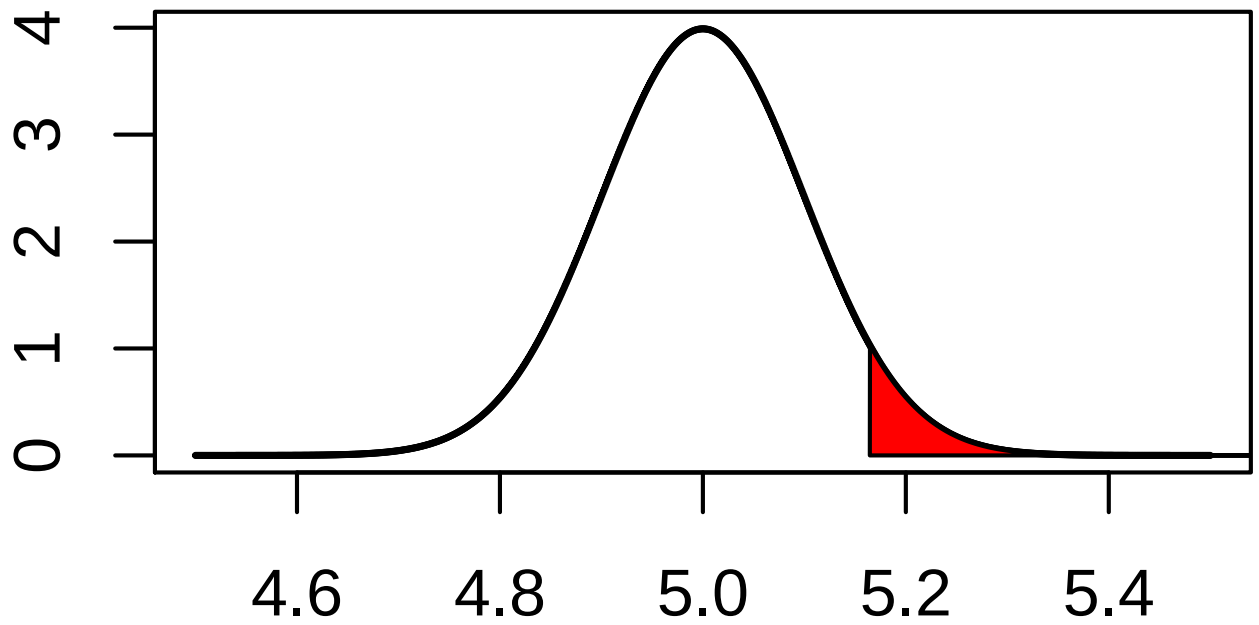
¿podría deberse al azar (a la muestra particular obtenida)?

La muestra ¿**contradice mucho** la afirmación del fabricante?

Ver ejemplo 7.1.1 del libro

Estrategia 1: prefijar un cupo de medias muestrales incompatibles con $\mu_X \leq 5$

- Suponer que $\mu_X = 5$: caso menos desfavorable para el fabricante.
- **Regla decisión**: rechazar $\mu_X \leq 5$ si $\bar{X}$ está entre el 5% de muestras menos probables
- Como $n > 30$, si $\mu_X = 5$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu_X = 5, \sigma = \frac{0.6}{\sqrt{36}}\right)$




```
signif(qnorm(0.95, mean = 5, sd = 0.6/sqrt(36)), digits = 3)
```

```
## [1] 5.16
```

Como $\bar{X}_* = 5.3 > 5.16$ **se rechaza** $\mu_X \leq 5$ con probabilidad de error 0.05
Se suele usar error $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$

Estrategia 2: si $\mu_X \leq 5$, ¿hay muestras aún más improbables?

- Suponer que $\mu_X = 5$: caso menos desfavorable para el fabricante
- Como $n > 30$, si $\mu_X = 5$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu_X = 5, \sigma = \frac{0.6}{\sqrt{36}}\right)$
- Calcular la probabilidad de obtener una media muestral que contradiga **aún más** la hipótesis del fabricante:

$$P(\bar{X} > \bar{X}_*)$$

  - si es "pequeña" se rechaza
  - si NO es "pequeña" NO se rechaza

```
pnorm(5.3, mean = 5, sd = 0.6/sqrt(36), lower.tail = F)
```

```
## [1] 0.001349898
```

Como 0.00135 es pequeño, **se rechaza** $\mu_X \leq 5$ con probabilidad de error 0.00135

Se suele comparar 0.00135 con $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$

Ejemplo: Un fabricante garantiza a un laboratorio farmaceútico que sus máquinas producen comprimidos de un diámetro medio de 13mm. Una muestra de 100 unidades dio como diámetro medio $\bar{X}_* = 13.2$ con $s = 0.6$. ¿Es aceptable esta afirmación al nivel de significación del 5 %?

$X =$ "diámetro en mm de la píldora"

- El fabricante asegura que:

$$\mu_X = 13$$

- Los datos muestrales sugieren lo contrario

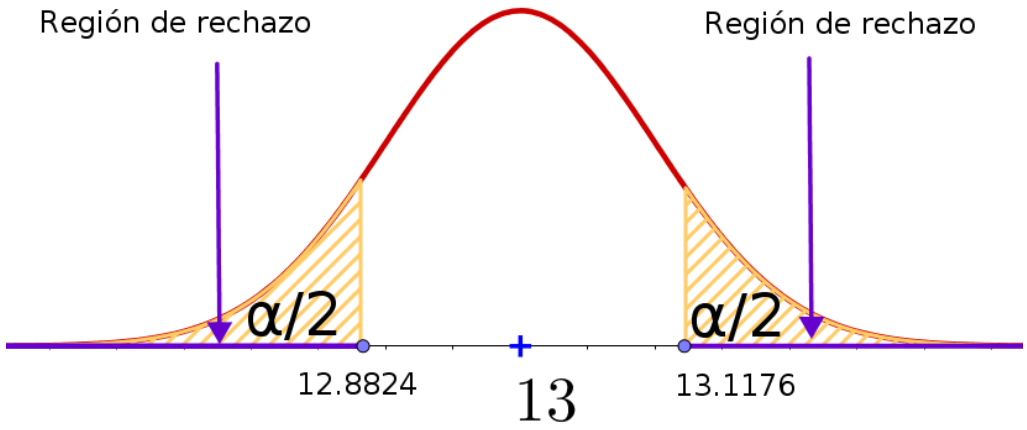
$$\mu_X \neq 13$$

¿podría deberse al azar (a la muestra particular obtenida)?

La muestra ¿**contradice mucho** la afirmación del fabricante?

Estrategia 1: prefijar un cupo de medias muestrales incompatibles con $\mu_X \neq 13$

- Suponer que $\mu_X = 13$.
- **Regla decisión**: rechazar $\mu_X \neq 13$ si $\bar{X}$ está entre el 5% de muestras menos probables
- Como $n > 30$, si $\mu_X = 13$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu_X = 13, \sigma = \frac{0.6}{\sqrt{100}}\right)$




```
signif(qnorm(c(0.025, 0.975), mean = 13, sd = 0.6/sqrt(100)), digits = 4)
```

```
## [1] 12.88 13.12
```

Como $\bar{X} = 13.2 > 13.1$ **se rechaza** $\mu_X = 13$ con probabilidad de error 0.05
Se suele usar error $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$

Estrategia 2: si $\mu_X = 13$, ¿hay muestras aún más improbables?

- Como $n > 30$, si $\mu_X = 13$ entonces $\bar{X} \sim N\left(\mu_X = 13, \sigma = \frac{0.6}{\sqrt{100}}\right)$
- Calcular la probabilidad de obtener una media muestral que contradiga **aún más** la hipótesis del fabricante. Ahora, $|13 - 13.2| = 0.2$; calcular

$$P(\bar{X} < 12.8 | \mu_X = 13) + P(\bar{X} > 13.2 | \mu_X = 13)$$

  - si es "pequeña" se rechaza
  - si NO es "pequeña" NO se rechaza

```
pnorm(12.8, mean = 13, sd = 0.6/sqrt(100))+
pnorm(13.2, mean = 13, sd = 0.6/sqrt(100), lower.tail = F)
```

```
## [1] 0.0008581207
```

que, por la simetría, es lo mismo que

```
2*pnorm(12.8, mean = 13, sd = 0.6/sqrt(100))
```

```
## [1] 0.0008581207
```

Se rechaza $\mu_X = 13$ con probabilidad de error 0.00085. Es

Terminología

1. La hipótesis que pretendemos demostrar es la **hipótesis alternativa**: $\mathbf{H}_1$ ó $\mathbf{H}_1$.
2. La hipótesis contraria a H_1 es la **hipótesis nula** y se representa con $\mathbf{H}_0$.

Se trata de tomar una muestra para confrontar las hipótesis con la realidad

- Suponer que H_0 es cierta.
- Establecer una medida (probabilidad) de lo compatibles que son H_0 y los datos.
- Se decide a partir de una muestra: **NUNCA** se acepta una hipótesis. Sólo se pueden rechazar y, por eliminación, queda la otra.

Tipos de contraste sobre el parámetro θ

1. Bilateral

$$H_0 : \theta = \theta_0, \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

2. Unilateral

$$H_0 : \theta \leq \theta_0, \qquad H_1 : \theta > \theta_0$$

   o bien

$$H_0 : \theta \geq \theta_0, \qquad H_1 : \theta < \theta_0$$

donde θ_0 es un valor concreto.

Se decide a partir de una muestra: hay posibilidad de equivocarse

Resultados de un contraste

	¿Qué hipótesis es cierta?	
	H_0 es cierta	**H_1 es cierta**
Rechazar H_0	**Error tipo I**	**Decisión correcta**
Rechazar H_1	**Decisión correcta**	**Error tipo II**

- **Error tipo I**
  - Rechazar H_0 cuando es cierta.
  - Se denota $\alpha = P(\text{error tipo I})$ y es el **nivel de significación**
- **Error tipo II**
  - Rechazar H_1 a pesar de ser cierta.
  - Se denota $\beta = P(\text{error tipo II})$

Sección 7.1 del libro

Fijadas H_0 y H_1, suponer H_0 cierta

Estadístico de contraste es una función de la muestra

- de la que se conoce su distribución de probabilidad
- que involucra el parámetro poblacional y su estimación muestral

que se utiliza para realizar el contraste

Ejemplo: En una afirmación sobre μ_X para muestras grandes

$$\bar{X} \sim N(\mu_X, s/\sqrt{n})$$

La **región de rechazo al nivel de significación** α: es el subconjunto de estimaciones posibles que más contradice H_0 y tiene probabilidad α.

Pizarra:

El p valor del contraste: es la probabilidad de obtener estimaciones aún más contradictorias con H_0 que el valor del estadístico de contraste ya obtenido de la muestra

Pizarra:

Contrastes para la media Si H_0 estipula $\mu_X = \mu_0$ (bilateral o unilateral)

¿Qué estadístico utilizar?

Población normal:

- σ conocida: $X \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ independientemente de n
- σ desconocida, muestra pequeña $n < 30$: $\frac{X-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Población cualquiera, muestra grande ($n > 30$):

- $X \sim N\left(\mu_0, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Secciones 7.4, 7.5 del libro

Ejemplo 1: región de rechazo y p-valor para

$$H_0 : \mu_X \geq 10 \qquad H_1 : \mu_X < 10$$

- $n = 49$
- $\bar{X} = 9.5$
- $s = 1.2$

Ejemplo 2: región de rechazo y p-valor para

$$H_0 : \mu_X = 10 \qquad H_1 : \mu_X \neq 10$$

- $n = 25$, población normal
- $\bar{X} = 9.5$
- $s = 1.2$

Secciones 7.4, 7.5 del libro