Tema 4: INFERENCIA ESTADISTICA - V

El tamaño de la muestra: relevancia científica frente a significatividad estadística. Contraste de hipótesis sobre la varianza y la proporción

Biología sanitaria 2017/18. Universidad de Alcalá

M. Marvá. Actualizado: 2017-11-16

El tamaño de la muestra: relevancia estadística vs relevancia científica

Un fabricante garantiza que produce comprimidos de diámetro medio de 13mm. En una muestra de 50 unidades tiene un diámetro medio $\bar{X} = 13.2$mm, cuasidesviación típica $s = 0.6$mm. ¿Es aceptable esta afirmación al nivel de significación $\alpha =$**1%**?

Se contrasta $H_0 : \mu = 13$, $H_1 : \mu \neq 13$

Región de no rechazo: $\left(13 - z_{0.995}\frac{0.6}{\sqrt{50}},\ 13 + z_{0.995}\frac{0.6}{\sqrt{50}}\right)$

```
signif(13 + c(-1, 1) * qnorm(0.995) * 0.6/sqrt(50), digits = 4)
```

```
## [1] 12.78 13.22
```

El contraste NO es significativo.

¿Y si la muestra tiene tamaño 1000? Región de no rechazo:

```
signif(13 + c(-1, 1) * qnorm(0.995) * 0.6/sqrt(1000), digits = 4)
```

```
## [1] 12.95 13.05
```

y ahora el contraste es significativo!!

Págs 255 - 257 del libro

Relevancia estadística vs relevancia científica

- Todo contraste no significativo puede ser significativo si se aumenta el tamaño de la muestra lo suficientemente
- Cuando sólo se conocen los valores de los estadísticos ($\bar{X}_*$, s, n) la **d de Cohen** compara la diferencia entre la media muestral observada y H_0 con la cuasidesviación típica:

$$d = \frac{\bar{X}_* - \mu_0}{s}$$

  sin considerar el tamaño de la muestra. Interpretación:
  - $d < 0.2$, apunta a diferencia no relevante
  - $d > 0.8$, apunta a diferencia relevante
  - $0.2 < d < 0.8$ **conocimiento experto!!**
- Cuando se tiene acceso a los datos en bruto hay alternativas (que veremos en prácticas)

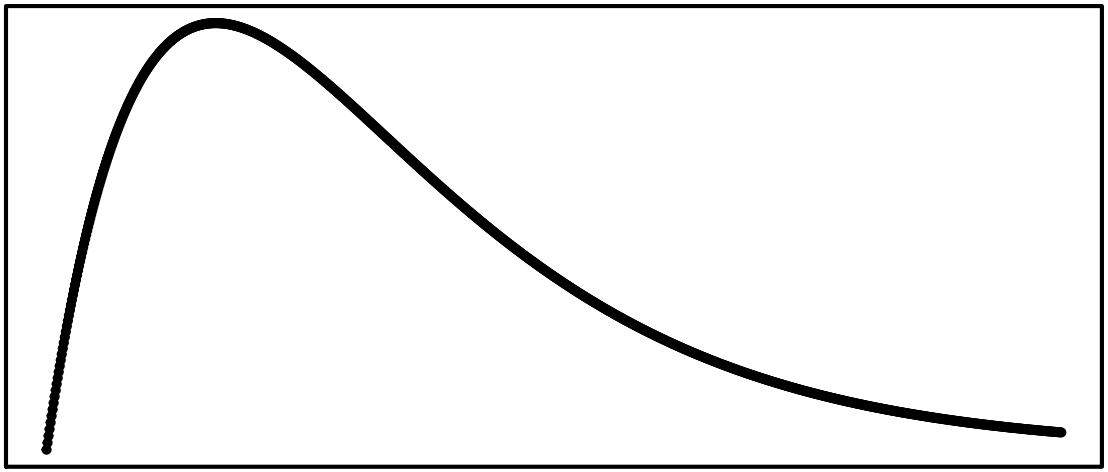
Sobre el ejemplo anterior $d = \frac{13.2 - 13}{0.6} = \frac{1}{3}$

IMPORTANTE: la d de Cohen **no sustituye** al contraste sobre la media. Es una herramienta *adicional* para el caso en el que se sospecha que el contraste es significativo debido a que el tamaño de la muestra es muy grande

Págs 255 - 257 del libro

Contraste sobre la varianza en poblaciones normales

El estadístico adecuado para entender la distribución muestral de σ^2 es $(n-1)\dfrac{s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$



El esquema del contraste: establecer H_0 ($\sigma = \sigma_0$) y H_1; obtener cuasidesviación típica s_*,

- **Región de rechazo**: fijar ns α, usar localizar la región con valores del estadístico más contradictorios con H_0, ubicar el valor del estadístico de contraste s_*^2
- **P-valor** Calcular la probabilidad de obtener valores s^2 del estadístico de contraste más contradictorios con H_0 que s_*^2

Sección 7.6 del libro

Ejemplo: Un laboratorio farmaceútico garantiza que produce comprimidos de diámetro uniforme, porque la desviación típica de su diámetro es 0.5mm. Una muestra de 15 unidades dio una cuasidesviación típica $s_* = 0.7$mm. ¿Es aceptable la afirmación del laboratorio al nivel de significación del 5%?

Para cada uno de los contrastes:

1. $H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_0^2 = 0.5$ $\qquad$ $H_1 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2 > 0.5$
2. $H_0 : \sigma_X = 0.5 = \sigma_0^2$ $\qquad$ $H_1 : \sigma_X \neq 0.5 = \sigma_0^2$

se pide

1. Dibujar, de forma aproximada, la región de rechazo
2. "localizar" el estadístico de contraste.

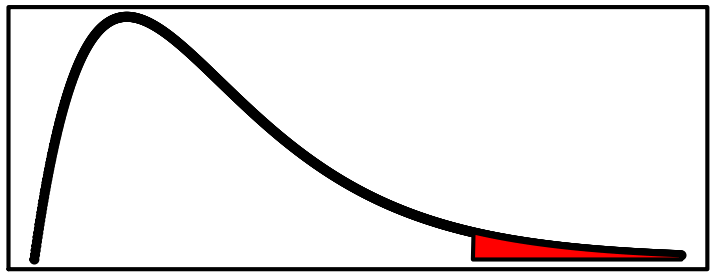
Sección 7.6 del libro

Contraste sobre la varianza con nivel de significación α.

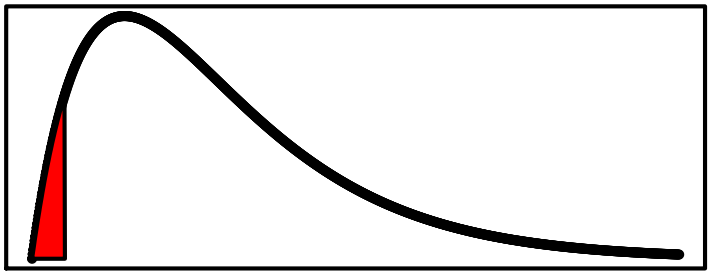
Región de rechazo: se usa el estadístico

$$Y = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$$

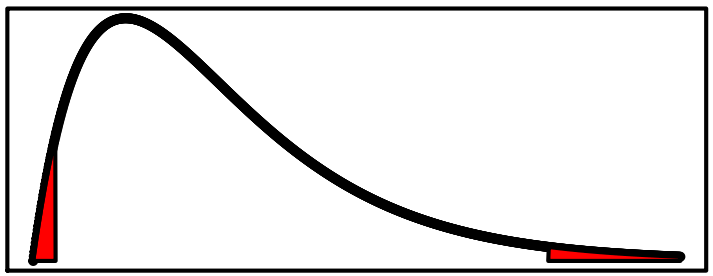
(a) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\quad$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$. Región de rechazo: $Y > \chi^2_{n-1,\alpha}$



(b) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\quad$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$. Región de rechazo: $Y < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$



(c) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\quad$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Región de rechazo: $Y \notin \left(\chi^2_{k,1-\alpha/2}, \chi^2_{k,\alpha/2}\right)$



Ejemplo: Un laboratorio farmaceútico garantiza que produce comprimidos de diámetro uniforme, porque la desviación típica de su diámetro es 0.5mm. Una muestra de 15 unidades dio una cuasidesviación típica $s_* = 0.7$mm. ¿Es aceptable la afirmación del laboratorio al nivel de significación del 5%?

Para cada uno de los contrastes:

1. $H_0 : \sigma_X^2 \leq \sigma_0^2 = 0.5$ $\qquad$ $H_1 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2 > 0.5$
2. $H_0 : \sigma_X = 0.5 = \sigma_0^2$ $\qquad$ $H_1 : \sigma_X \neq 0.5 = \sigma_0^2$

se pide calcular el p-valor

Sección 7.6 del libro

Contraste sobre la varianza p-valor

Dados H_0 ($\sigma^2 = \sigma_0^2$) y la varianza muestral s_*^2

(a) $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

$$\text{P-valor} = P\left(\chi^2_{n-1} > (n-1)\frac{s_*^2}{\sigma_0^2}\right),$$

cola derecha del estimador

(b) $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.

$$\text{P-valor} = P\left(\chi^2_{n-1} < (n-1)\frac{s_*^2}{\sigma_0^2}\right),$$

cola izquierda del estimador.

(c) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

1. Si $s_*^2 > \sigma_0^2$, entonces

$$\text{P-valor} = 2P\left(\chi^2_{n-1} > (n-1)\frac{s_*^2}{\sigma_0^2}\right)$$

2. Si $s_*^2 < \sigma_0^2$, entonces

$$\text{P-valor} = 2P\left(\chi^2_{n-1} < (n-1)\frac{s_*^2}{\sigma_0^2}\right)$$

Sección 7.6 del libro

Inferencia sobre la proporción

Nos interesa la proporción p de invidiuos que tiene cierta característica.

Consideramos la **proporción muestral**

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \qquad X_i \sim Bernoulli(p)$$

Si se cumplen a la vez las condiciones:

$$n > 30, \quad n \cdot \hat{p} > 5, \quad n \cdot \hat{q} > 5.$$

Entonces, conforme crece n, la distribución de $\hat{p}$ se aproxima a una normal

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\right)$$

Ejemplo: Un estudio reciente sobre la mutación asociada con la brida en el arao común afirma que la proporción es $p = 0.35$. Un muestreo realizado en 2010 en la isla de Thresnish (Escocia) arrojó 139 individuos embridados y 317 no embridados. ¿Contradicen esta muestra la conclusión del estudio arriba citado?

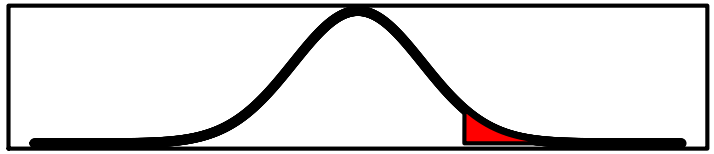
Realiza el contraste con al región de rechazo (con un nivel de significación del 1%) y calcula el p-valor del contraste.

Inferencia sobre la proporción **Cálculo de la región de rechazo** al ns α.

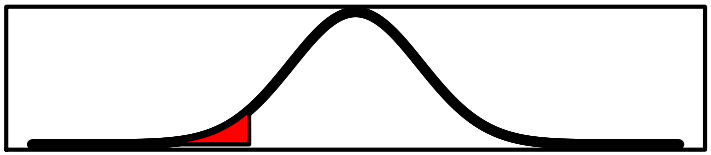
Fijada la hipótesis nula H_0 ($p = p_0$) el TLC dice que

$$\hat{p} \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\right)$$

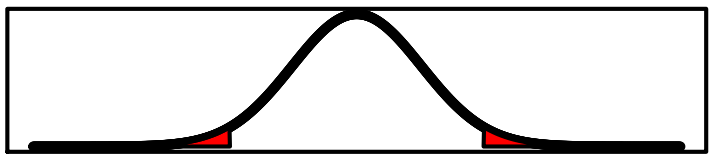
(a) $H_0 : p \leq p_0$ $\quad$ $H_a : p > p_0$. Región de rechazo: $\hat{p} > p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}$



(b) $H_0 : p \geq p_0$ $\quad$ $H_a : p < p_0$. Región de rechazo: $\hat{p} < p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}$



(c) $H_0 : p = p_0$ $\quad$ $H_a : p \neq p_0$. Región de rechazo: $|\hat{p} - p_0| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}$



¡Ojo! se usa p_0 y q_0 en lugar de $\hat{p}$ y $\hat{q}$ para la desviación típica muestral.

Inferencia sobre la proporción **Cálculo del p-valor**. Fijada la hipótesis nula H_0 ($p = p_0$) y obtenida la proporción muestral $\hat{p}_*$ el TLC dice así

$$\hat{p} \sim N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 \cdot q_0}{n}}\right)$$

(a) $H_0 : p \leq p_0$ $\quad$ $H_a : p > p_0$. P-valor

$$P\left(Z > \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0/n}}\right) = P\left(\hat{p} > \hat{p}_* \mid \hat{p} \sim N\left(p_0, \sqrt{p_0 \cdot q_0/n}\right)\right)$$

cola a la derecha del estadístico. La igualdad es análoga para el resto de p-valores

(b) $H_0 : p \geq p_0$ $\quad$ $H_a : p < p_0$. P-valor

$$P\left(Z < \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0/n}}\right)$$

cola a la izquierda del estadístico.

(c) $H_0 : p = p_0$ $\quad$ $H_a : p \neq p_0$. P-valor

$$2 \cdot P\left(Z > \frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{p_0 \cdot q_0/n}}\right)$$

colas (bilateral) más alejadas de p_0 que el estadístico.